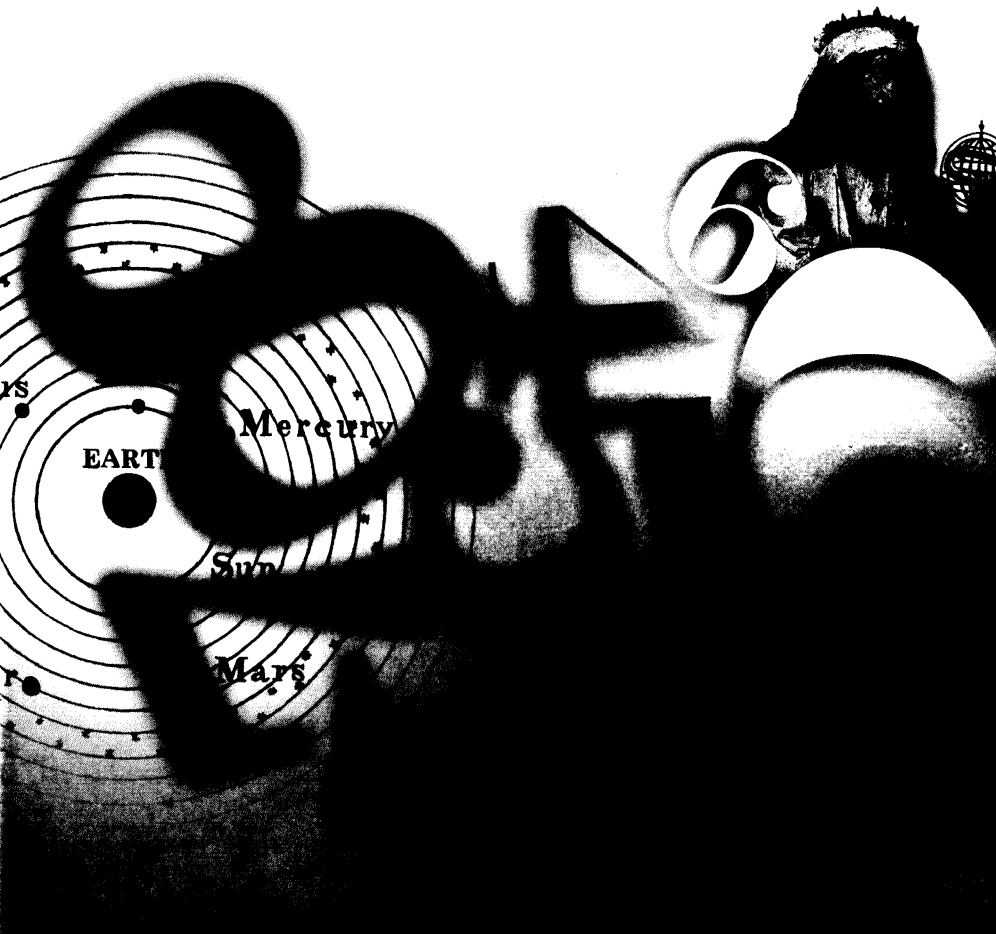
ÎMBLÂNZIREA INFINITULUI

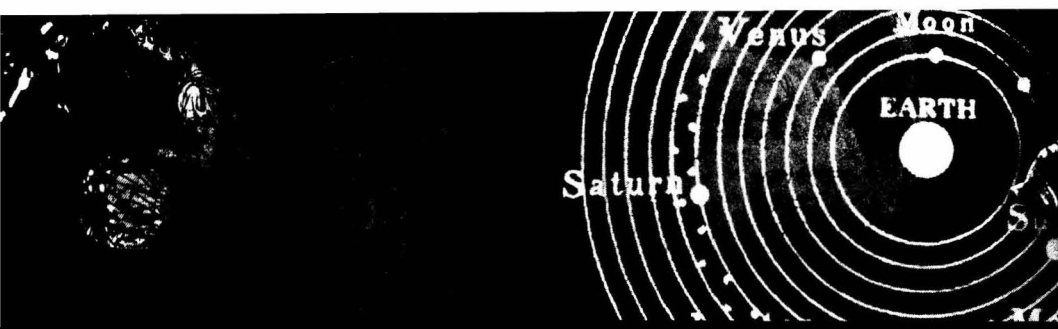
POVESTEA MATEMATICII



Cuprins

Prefață / 6

1. Semne, crestături și tăblițe / 9
2. Logica formei / 22
3. Notații și numere / 46
4. Seducția necunoscutului / 62
5. Eternele triunghiuri / 79
6. Curbe și coordonate / 94
7. Tiparele numerelor / 107
8. Sistemul lumii / 124
9. Tiparele din natură / 143
10. Cantități imposibile / 158



11. Fundamente solide / 170

12. Triunghiuri imposibile / 183

13. Apariția simetriei / 198

14. Algebra ajunge la maturitate / 214

15. Geometria benzilor de cauciuc / 230

16. A patra dimensiune / 249

17. Forma logicii / 266

18. Cât de probabil e? / 286

19. Tocarea numerelor / 297

20. Haosul și complexitatea / 307

Bibliografie / 323

Matematica n-a apărut

dintr-odată. Ea s-a dezvoltat prin efortul cumulat al mai multor oameni, aparținând mai multor culturi şi vorbind limbi diferite. Idei matematice care sunt folosite şi azi datează de peste 4000 de ani.

Multe descoperiri umane sunt efemere – proiectarea roților carelor a fost foarte importantă în Noul Regat egiptean, dar astăzi nu e chiar o tehnologie de vârf. Matematica, dimpotrivă, dăinuie de regulă. Odată făcută o descoperire matematică, oricine o poate folosi, iar astfel capătă o viață proprie. Ideile matematice bune rareori se demodează, deşi aplicarea lor se poate schimba spectaculos. Metodele de rezolvare a ecuațiilor, descoperite de vechii babilonieni, sunt folosite şi azi. Noi nu folosim tipul lor de notație, dar legătura istorică e incontestabilă. De fapt, cea mai mare parte a matematicii predate în şcoală datează de cel puțin 200 de ani. Apariția în programa şcolară a matematicii „moderne", în anii '60, a adus-o până în secolul XIX. Dar, în ciuda aparențelor, matematica n-a stagnat. În prezent, se creează în fiecare săptămână mai multă matematică decât au reuşit babilonienii în două mii de ani.

Dezvoltarea civilizației umane şi dezvoltarea matematicii au mers mână în mână. Fără descoperirile greceşti, arabe şi indiene din trigonometrie, navigația în largul oceanului ar fi fost o întreprindere şi mai aventuroasă decât a fost atunci când marii navigatori au ajuns pe toate continentele. Drumurile comerciale dintre China şi Europa sau dintre Indonezia şi cele două Americi au fost călăuzite de un fir matematic invizibil.

Societatea actuală nu ar putea funcționa fără matematică. Practic, tot ce intră în peisajul nostru cotidian, de la televiziune la telefoane mobile, de la avioanele de mare capacitate cu reacție la sistemele de navigație prin satelit de la bordul mașinilor, de la mersul trenurilor la scanerele medicale, se bazează pe idei şi metode matematice. Uneori matematica implicată e veche de mii de ani, alteori a fost descoperită cu o săptămână în urmă. Cei mai mulți dintre noi nici nu-şi dau seama că ea e mereu prezentă, acționând în culise pentru a face cu putință miracolele tehnologiei moderne.

Lucrul acesta e regretabil, fiindcă ne face să credem că tehnologia funcționează prin magie şi să ne aşteptăm la noi minuni în fiecare zi. Pe de altă parte, e absolut firesc: vrem să folosim aceste miracole cu cât mai multă uşurință şi cu cât mai puțină bătaie de cap. Dacă fiecare pasager ar trebui să treacă un examen de trigonometrie înainte de a se urca la bordul avionului, puțini dintre noi ar

părăsi vreodată solul. Iar dacă astfel s-ar reduce, poate, emisiile de carbon, lumea noastră ar deveni totodată foarte mică și provincială.

A scrie o istorie a matematicii cu adevărat inteligibilă e practic imposibil. Subiectul este acum atât de vast, de complicat și de tehnic, încât chiar și pentru un specialist o asemenea carte ar fi de necitit – ca să nu mai vorbim că nimeni n-ar putea s-o scrie. Morris Kline a încercat s-o facă în monumentala sa lucrare *Gândirea matematică din Antichitate până în epoca modernă.* Ea are peste 1200 de pagini, cu caractere mici, și omite aproape tot ce s-a întâmplat în ultima sută de ani.

Cartea de față e mult mai mică, ceea ce înseamnă că a trebuit să fiu selectiv, în special în privința matematicii secolelor XX și XXI. Sunt perfect conștient de toate subiectele importante pe care am fost nevoit să le omit. Nu există în ea nici geometrie algebrică, nici teoria coomologiei, nici analiza elementelor finite și nici undine. Această listă a ceea ce lipsește e mult mai lungă decât lista a ceea ce este inclus. Alegerea mea a fost călăuzită de cunoștințele pe care cititorii le posedă probabil și de noile idei care pot fi explicate succint.

Povestirea urmează în genere cronologia în cadrul fiecărui capitol, dar capitolele sunt organizate tematic. A trebuit să procedez astfel pentru ca prezentarea să fie coerentă; dacă aș fi pus totul în ordine cronologică, discuția ar fi sărit la întâmplare de la un subiect la altul, fără vreo direcție clară. În felul acesta m-aș fi apropiat mai mult de istoria propriu-zisă, dar cartea ar fi devenit de necitit. Prin urmare, fiecare capitol începe cu o întoarcere în trecut și se oprește apoi la câteva din momentele de răscruce în dezvoltarea subiectului. Primele capitole zăbovesc mai mult asupra trecutului; următoarele capitolele ajung uneori până în prezent.

Am încercat să dau o idee asupra matematicii moderne, prin care înțeleg tot ce s-a făcut în ultima sută de ani, alegând subiecte despre care cititorii poate că au auzit și legându-le de tendințele istorice generale. Omiterea unui subiect nu înseamnă că acesta ar fi lipsit de importanță, dar cred că e mai firesc să vorbesc în câteva pagini despre demonstrația Marii Teoreme a lui Fermat dată de Andrew Wiles – despre care cei mai mulți cititori vor fi auzit – decât, de exemplu, despre geometria necomutativă, al cărei cadru singur ar ocupa câteva capitole.

Pe scurt, aceasta e o istorie, nu istoria. Și e istorie în sensul că povestește trecutul. Ea nu se adresează istoricilor de profesie, nu face distincțiile subtile pe care ei le găsesc necesare, iar adesea prezintă ideile trecutului prin prisma prezentului. Acesta e un păcat capital pentru un istoric, deoarece dă impresia că anticii se străduiau cumva să ajungă la perspectiva noastră din prezent. Dar

cred că e scuzabil şi inevitabil, dacă vrem să pornim de la ceea ce cunoaştem şi să ne întrebăm cum au apărut aceste idei. Grecii nu au studiat elipsa pentru a face posibilă teoria lui Kepler privind orbitele planetelor, iar Kepler nu şi-a formulat cele trei legi de mişcare a planetelor pentru ca Newton să le transforme în legea gravitaţiei. Dar legea gravitaţiei a lui Newton se bazează din plin pe studiile grecilor asupra elipsei şi pe analiza lui Kepler asupra datelor de observaţie.

O temă secundară a cărţii e folosirea practică a matematicii. Am oferit aici un spectru eterogen de aplicaţii, atât din trecut, cât şi din prezent. Din nou, omiterea unui subiect nu înseamnă că e lipsit de importanţă.

Matematica are o istorie lungă, glorioasă, dar oarecum ignorată, iar influenţa ei asupra dezvoltării culturii umane a fost imensă. Dacă prezenta carte poate reda măcar o mică parte a acestei istorii, atunci înseamnă că îşi va fi atins scopul.

Coventry, mai 2007

1

Nașterea numerelor

Matematica a început cu numerele, iar numerele sunt şi astăzi esențiale, chiar dacă subiectul nu se mai limitează la calcule numerice. Construind pe baza numerelor noțiuni tot mai sofisticate, matematica a devenit un domeniu vast şi divers al gândirii umane, trecând mult dincolo de ceea ce găsim într-o programă şcolară. Matematica actuală se ocupă mai mult de structură, configurație şi formă decât de numerele ca atare. Metodele ei sunt foarte generale, deseori abstracte. Aplicațiile ei cuprind ştiința, industria, comerțul – ba chiar şi artele. Matematica este universală şi atotprezentă.

La început au fost numerele

De-a lungul a mii de ani, matematicieni din culturi diferite au creat o vastă suprastructură întemeindu-se pe numere: geometria, analiza, sistemele dinamice, probabilitățile, topologia, haosul, complexitatea etc. *Mathematical Reviews*, care ține evidența fiecărei noi publicații de matematică, clasifică subiectul în aproape o sută de domenii mari, subîmpărțite în câteva mii de specialități. În lume există peste 50 000 de matematicieni implicați în cercetare, care publică în fiecare an peste un milion de pagini de matematică nouă, adică nu doar mici variațiuni asupra unor rezultate existente.

Numerele par foarte simple şi accesibile, dar aparențele sunt înşelătoare.

Matematicienii au sondat şi fundamentul logic al domeniului lor, descoperind concepte mai profunde decât numerele – logica matematică, teoria mulțimilor. Dar, încă o dată, principala motivație, punctul din care izvorăsc toate celelalte, este conceptul de număr.

Numerele par foarte simple şi accesibile, dar aparențele sunt înşelătoare. Calculele cu numere pot fi dificile; obținerea *numărului corect* poate fi anevoioasă. Dar chiar şi în acest caz e mult mai uşor să te foloseşti de numere decât să explici semnificația lor. Numerele socotesc lucruri, dar nu sunt lucruri, deoarece poți apuca două căni, dar nu poți apuca numărul „doi" . Numerele sunt notate prin simboluri, dar culturi diferite folosesc simboluri diferite pentru acelaşi număr. Numerele sunt abstracte, dar societatea noastră se bazează pe ele şi nu ar funcționa fără ele. Numerele sunt un anumit tip de construcție mentală, şi totuşi ne dăm seama că şi-ar păstra semnificația chiar dacă omenirea ar dispărea într-o catastrofă globală şi nu ar mai rămâne nici o minte care să mediteze la ele.

Scrierea numerelor

Istoria matematicii a început odată cu inventarea simbolurilor scrise care desemnează numerele. Sistemul nostru bine-cunoscut de reprezentare a tuturor numerelor posibile, oricât de mari, prin „cifrele" 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 constituie o invenţie relativ recentă; ea a apărut acum circa 1500 de ani, iar extinderea sa la „zecimale", care ne permit să reprezentăm numerele cu mare precizie, nu e mai veche de 450 de ani. Calculatoarele, care au întipărit calculul matematic atât de adânc în cultura noastră, încât aproape că nu-i mai sesizăm prezenţa, ne însoţesc de doar 50 de ani, iar calculatoarele suficient de puternice şi rapide spre a fi folosite acasă şi la serviciu s-au răspândit acum vreo 20 de ani.

În absenţa numerelor, civilizaţia actuală nu ar fi putut exista. Numerele sunt pretutindeni, ca slujitori discreţi, agitându-se în culise – purtându-ne mesajele, corectându-ne ortografia când scriem, programându-ne călătoriile de vacanţă în Caraibe, supraveghindu-ne bunurile, garantându-ne că medicamentele noastre sunt sigure şi eficiente. Iar, pe de altă parte, făcând posibile armele nucleare şi ghidând bombele şi rachetele spre ţintele lor. Nu toate aplicaţiile matematicii au dus la ameliorarea condiţiei umane.

Dar cum a apărut de fapt această enormă industrie numerică? Totul a început cu mici semne din lut, în urmă cu zece mii de ani, în Orientul Apropiat.

Încă de atunci, socotitorii ţineau evidenţa a ceea ce poseda fiecare şi în ce cantitate – deşi nu se inventase scrisul şi nu existau simboluri pentru numere. În loc de simboluri, acei contabili din vechime foloseau mici semne din lut. Unele erau conice, altele sferice sau ovoidale. Existau de asemenea cilindri, discuri şi piramide. Arheologul Denise Schmandt-Besserat a dedus că semnele acestea erau reperele elementare ale acelui timp. Sferele din lut reprezentau grămezi de cereale, cilindrii însemnau animale, ovoizii – chiupuri de ulei. Cele mai vechi semne datează de pe la 8000 î.Cr. şi au fost folosite în mod curent vreme de cinci mii de ani.

Cu trecerea timpului, semnele au devenit mai complicate şi mai specializate. Au apărut conuri decorate pentru reprezentarea pâinilor şi forme faţetate pentru cea a vedrelor de bere. Schmandt-Besserat şi-a dat seama că aceste semne erau mult mai mult decât un dispozitiv contabil. Ele constituiau un prim pas către simbolurile numerice, aritmetică şi matematică. Dar acel prim pas a fost destul de straniu şi pare să fi fost făcut din întâmplare.

Totul s-a datorat faptului că semnele erau folosite pentru a ţine evidenţa, poate pentru plata impozitelor sau ca dovadă juridică a proprietăţii. Avantajul semnelor era că socotitorii le puteau aranja rapid în grupuri, pentru a afla câte

animale sau cât grâu deținea sau datora o anumită persoană. Dezavantajul era acela că semnele puteau fi falsificate. Astfel, pentru a se asigura că nimeni nu are acces la ele, socotitorii le-au învelit în lut – de fapt, un fel de sigilii. Ei puteau afla imediat câte semne se aflau în fiecare înveliș și de ce tip, deschizându-l. Apoi puteau face un nou înveliș pentru a le păstra în continuare.

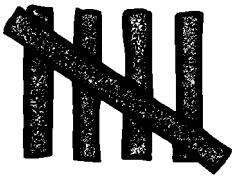
S-a dovedit însă că operația de a reînnoi periodic învelișul pentru a-i vedea conținutul era destul de anevoioasă, astfel încât funcționarii din Mesopotamia antică au găsit o soluție mai bună. Ei au scrijelit simboluri pe acele învelișuri, reprezentând semnele conținute. Dacă în interior se aflau șapte sfere, ei desenau șapte cercuri pe suprafața lutului umed.

La un moment dat, funcționarii mesopotamieni și-au dat seama că, odată ce aveau simbolurile de pe înveliș, conținutul nu mai era de fapt necesar, astfel încât nu mai trebuiau să spargă învelișul pentru a-l vedea. Acest pas evident, dar crucial, a dus la crearea unui set de simboluri scrise pentru numere, având forme diferite pentru fiecare tip de bunuri. Toate celelalte simboluri numerice, inclusiv cele folosite în zilele noastre, sunt descendentele intelectuale ale acestei invenții birocratice antice. De fapt, înlocuirea semnelor prin simboluri s-ar putea să fi constituit și nașterea scrierii.

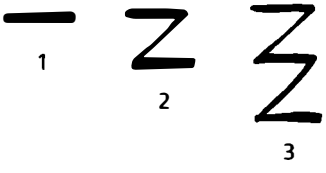
Osul Ishango purtând semnele crestăturilor și numerele care ar putea fi reprezentate prin ele.

Crestături de răboj

Aceste simboluri în lut nu sunt nicidecum cele mai vechi exemple de scriere a numerelor, dar toate exemplele mai vechi sunt doar mici zgârieturi, crestături de răboj, înregistrând numerele ca o serie de liniuțe – cum ar fi |||||||||||| spre a reprezenta numărul 13. Cele mai vechi semne de acest fel – 29 de crestături într-un os de



Crestăturile de răboj au avantajul că pot fi trasate succesiv, fără a altera sau şterge crestăturile anterioare. Ele se mai folosesc şi astăzi, adesea în grupuri de câte cinci, cea de a cincea tăindu-le în diagonală pe primele patru.



Prezenţa crestăturilor de răboj mai poate fi văzută şi azi în cifrele moderne. Simbolurile noastre 1, 2, 3 derivă dintr-o singură linie, două linii orizontale unite printr-o liniuţă oblică, şi trei linii orizontale unite prin două liniuţe oblice.

picior de babuin – sunt vechi de circa 37 000 de ani. Acest os a fost descoperit într-o peşteră din munţii Lebombo, de la graniţa dintre Swaziland şi Africa de Sud, astfel că aceasta se numeşte Peştera de Graniţă, iar osul este Osul Lebombo. În absenţa unei maşini a timpului, nu se poate şti cu certitudine ce reprezintă aceste semne, dar putem face deducţii logice. După calendarul lunar, o lună are 28 de zile, astfel încât semnele s-ar putea să fie legate de fazele Lunii.

Există relicve similare din Europa preistorică. Un os de lup descoperit în fosta Cehoslovacie are 57 de semne dispuse în unsprezece grupuri de câte cinci, plus două separate, şi e vechi de aproape 30 000 de ani. De două ori 28 fac 56, astfel că aceasta ar putea fi o consemnare a două luni ale anului lunar. Din nou, nu putem verifica această presupunere. Dar semnele par trasate intenţionat, iar ele trebuie să fi avut un anume rost.

O altă inscripţie matematică preistorică, Osul Ishango din Zair, are o vechime de 25 000 de ani (estimările anterioare la 6000–9000 de ani au fost revizuite în 1995). La prima vedere, semnele dispuse de-a lungul marginii osului par făcute la întâmplare, dar pot exista semnificaţii ascunse. Un şir conţine numerele prime de la 10 la 20, adică 11, 13, 17 şi 19, a căror sumă este 60. Un alt şir conţine 9, 11, 19 şi 21, care de asemenea au suma egală cu 60. Al treilea şir aminteşte de o metodă folosită pentru a înmulţi două numere prin dublări şi înjumătăţiri succesive. Totuşi configuraţiile care apar pot fi doar coincidenţe, şi a mai fost avansată ipoteza că Osul Ishango ar fi un calendar lunar.

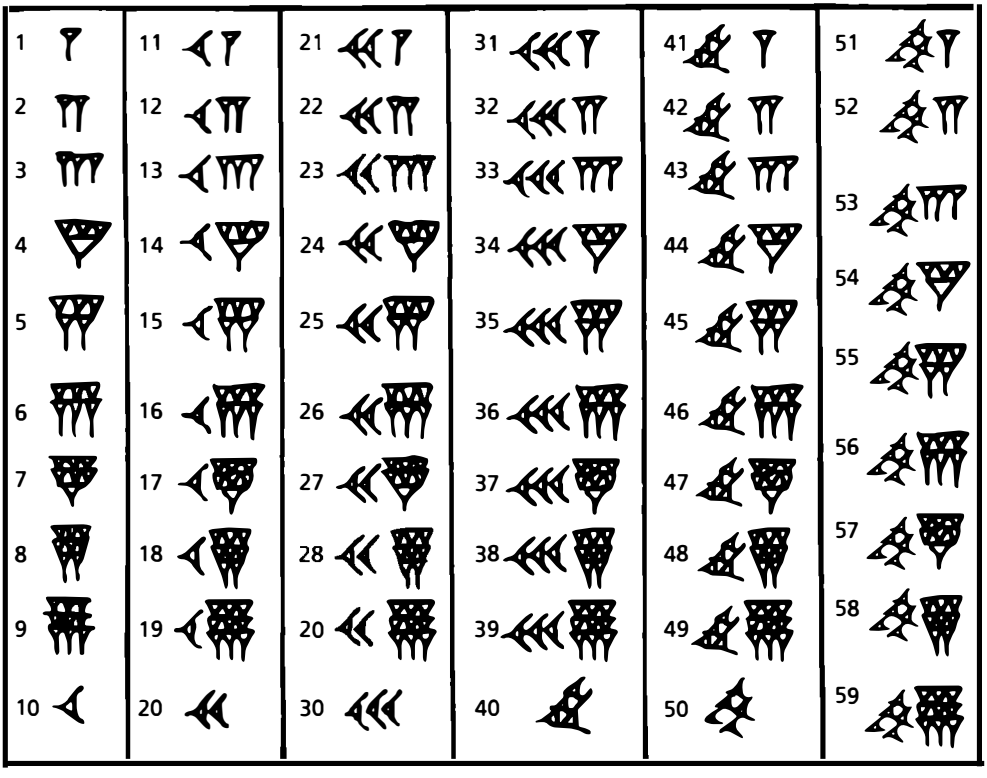
Primele cifre

Traseul istoric de la semnele socotitorilor antici la cifrele actuale e lung şi indirect. În cursul mileniilor, mesopotamienii a dezvoltat agricultura, iar de la stilul lor nomad de viaţă au trecut la aşezări permanente, devenite oraşe-stat:

Babilon, Eridu, Lagaş, Sumer, Ur. Vechile simboluri trasate pe tăblițe de lut umed s-au transformat în pictograme – simboluri care reprezintă cuvintele prin imagini simplificate ale semnificației lor – iar pictogramele au fost simplificate mai departe prin asamblarea lor dintr-un număr restrâns de semne în formă de cuişoare, imprimate în lutul umed cu o trestie uscată având un capăt aplatizat şi ascuțit. Diverse tipuri de semne puteau fi obținute prin schimbarea poziției trestiei. Pe la 3000 î.Cr. sumerienii elaboraseră o formă de scriere sofisticată, numită acum *cuneiformă* – „în formă de cuişoare".

Istoria acelei perioade e complicată, diverse oraşe deținând pe rând hegemonia. Mai cu seamă Babilonul a devenit dominant, iar în nisipurile Mesopotamiei s-au descoperit aproape un milion de tăblițe din lut. Câteva sute dintre ele se referă la matematică şi astronomie, demonstrând cunoştințele avansate ale babilonienilor în aceste domenii. Babilonienii erau astronomi desăvârşiți şi au claborat un simbolism sistematic şi sofisticat pentru numere, putând reprezenta datele astronomice cu mare precizie.

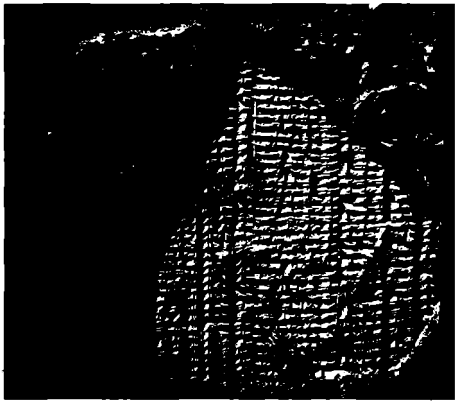
Simbolurile babiloniene pentru numerele 1–59



Simbolurile numerice babiloniene depăşesc cu mult simplele semne de răboj, fiind primele simboluri cunoscute care au realizat acest lucru. Se foloseau două feluri de cuneiforme: un semn vertical subţire pentru numărul 1 şi un altul orizontal gros pentru numărul 10. Aceste semne sunt grupate pentru a reprezenta numerele 2–9 şi 20–50. Dar acest tipar se opreşte la 59, iar semnul subţire capătă o nouă semnificaţie, devenind numărul 60.

Din acest motiv, despre sistemul numeric babilonian se spune că este unul „în baza 60", sau *sexagesimal*. Cu alte cuvinte, valoarea unui simbol poate fi un anumit număr, sau de 60 de ori acel număr, sau de 60 de ori 60 de ori acel număr, în funcţie de poziţia simbolului respectiv. Aceasta seamănă cu sistemul nostru zecimal, în care valoarea unui simbol se multiplică prin 10, sau prin 100, sau prin 1 000, în funcţie de poziţia sa. La numărul 777, de exemplu, primul 7 înseamnă „şapte sute", al doilea înseamnă „şapte zeci", iar al treilea înseamnă „şapte". Pentru un babilonian, o serie de trei repetiţii ale simbolului pentru „7" ar avea un înţeles diferit. Primul simbol ar însemna $7 \times 60 \times 60$, sau

La ce i-au ajutat numerele



Tăbliţa babiloniană a lui Jupiter. Babilonienii foloseau sistemul lor numeric în comerţul curent şi în contabilitate, dar şi pentru un scop mai sofisticat: astronomia. Aici capacitatea sistemului lor de a reprezenta numere fracţionare cu mare precizie era esenţială. Câteva sute de tăbliţe consemnează informaţii de astronomie. Între ele se află o tăbliţă destul de deteriorată care prezintă detalii privind mişcarea zilnică a planetei Jupiter de-a lungul unei perioade de 400 de zile. A fost scrisă în Babilon pe la 163 î.Cr.

O inscripţie tipică de pe tăbliţă înşiră numerele 126 8 16;6,46,58 –0;0,45,18 –0;0,11,42 +0;0,0,10, care corespund diverselor mărimi folosite pentru a calcula poziţia planetei pe cer. Observăm că numerele sunt date cu trei poziţii sexagesimale – ceva mai exact decât cu cinci poziţii zecimale.

25 200; al doilea ar însemna 7 × 60 = 420; al treilea ar însemna 7. Deci grupul celor trei simboluri ar însemna 25 200 + 420 + 7, adică, în notația noastră, 25 627. Relicve ale numerelor babiloniene în baza 60 există şi în zilele noastre. Cele 60 de secunde ale unui minut, 60 de minute ale unei ore şi 360 de grade ale unui cerc întreg datează din Babilonul antic.

Din cauza dificultăților de a tipări cuneiformele, savanții scriu cifrele babiloniene folosind un amestec de notații în baza 10 şi în baza 60. Astfel, cele trei repetiții ale simbolului cuneiform pentru 7 se scriu ca 7, 7, 7. Iar ceva în genul 23, 11, 14 reprezintă simbolurile babiloniene pentru 23, 11 şi 14 scrise în ordine, având valorea numerică (23 × 60 × 60) + (11 × 60) + 14, ceea ce dă 83 474 în notația noastră.

Simboluri ale numerelor mici

Nu numai că folosim zece simboluri pentru a reprezenta numere oricât de mari, dar folosim de asemenea aceleaşi simboluri pentru a reprezenta şi numere oricât de mici. Pentru aceasta, utilizăm virgula zecimală. Cifrele din stânga virgulei reprezintă numere întregi; cele din dreapta virgulei reprezintă partea fracționară. Fracțiile zecimale sunt multipli ai zecimii, sutimii etc. Astfel încât 25,47, de exemplu, reprezintă 2 zeci plus 5 unități plus 4 zecimi plus 7 sutimi.

Babilonienii cunoşteau acest procedeu şi îl foloseau cu succes în observațiile lor astronomice. Cercetătorii notează echivalentul babilonian al virgulei zecimale prin punct şi virgulă (;), dar acesta e o virgulă sexagesimală, iar numerele din dreapta sa sunt multipli de 1/60, (1/60 × 1/60) = 1/3 600 etc. De exemplu, şirul de numere 12,59;57,17 înseamnă

$$12 \times 60 + 59 + {}^{57}/_{60} + {}^{17}/_{3600}$$

adică aproximativ 779,955.

S-au descoperit aproape 2 000 de tăblițe babiloniene cu informații astronomice, dintre care majoritatea sunt destul de simple, de pildă descrierea unor metode de a prevedea eclipsele, tabele cu evenimente astronomice periodice şi fragmente scurte. Aproximativ 300 de tăblițe sunt mai ambițioase şi mai interesante; ele consemnează, de exemplu, observații privind mişcarea planetelor Mercur, Marte, Jupiter şi Saturn.

Deşi fascinantă, astronomia babiloniană e în afara subiectului nostru principal, care este matematica babiloniană pură. Dar pare plauzibil ca aplicarea ei în astronomie să fi fost un imbold pentru abordarea unor zone mai abstracte ale

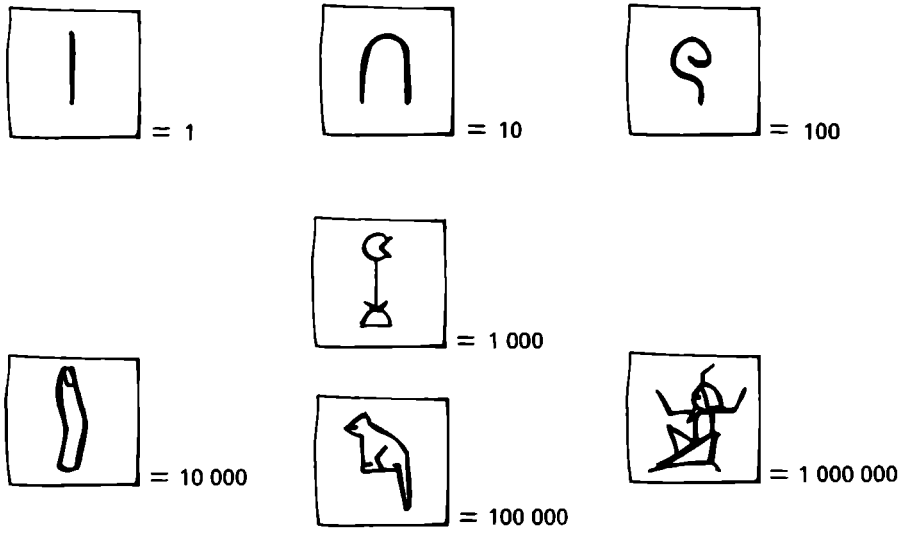
domeniului. Se cuvine să le recunoaştem astronomilor babilonieni precizia observaţiilor asupra evenimentelor cereşti. De exemplu, ei au descoperit că perioada orbitală a lui Marte (timpul dintre două apariţii în aceeaşi poziţie pe cer) este în sistemul lor de notaţie 12,59;57,17 zile – aproximativ 779,955 zile, după cum am văzut mai sus. Rezultatele actuale dau 799,936 zile.

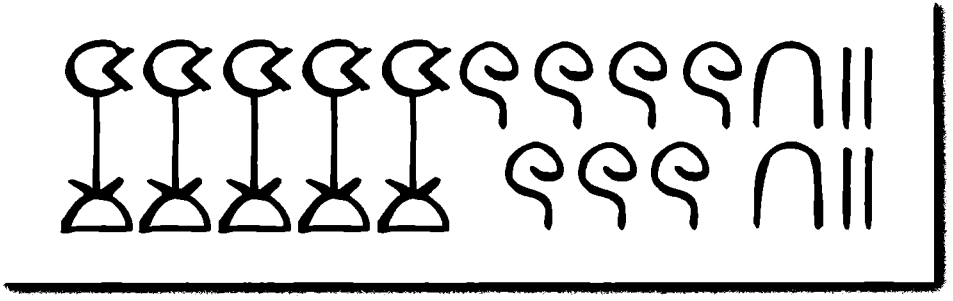
Vechii egipteni

Poate cea mai măreaţă dintre civilizaţiile antice a fost cea a Egiptului, care s-a dezvoltat de-a lungul văii Nilului şi în delta acestuia, între 3150 î.Cr. şi 31 î.Cr., cu o lungă perioadă timpurie „pre-dinastică" ajungând până la 6000 î.Cr., şi o dispariţie treptată sub stăpânirea romană, începând din 31 î.Cr. Egiptenii au fost constructori înzestraţi, au avut un sistem complex de credinţe şi ceremonii religioase şi au fost scrupuloşi în consemnarea evenimentelor. Cunoştinţele lor matematice erau însă modeste faţă de cele ale babilonienilor.

Sistemul antic egiptean de scriere a numerelor întregi este simplu şi direct. Există simboluri pentru numerele 1, 10, 100, 1000 şi aşa mai departe. Prin repetarea până la de nouă ori a acestor simboluri şi combinarea rezultatelor, se poate reprezenta orice număr. De exemplu, pentru a scrie numărul 5 724, egiptenii grupau cinci simboluri pentru 1 000, şapte simboluri pentru 100, două simboluri pentru 10 şi patru simboluri pentru 1.

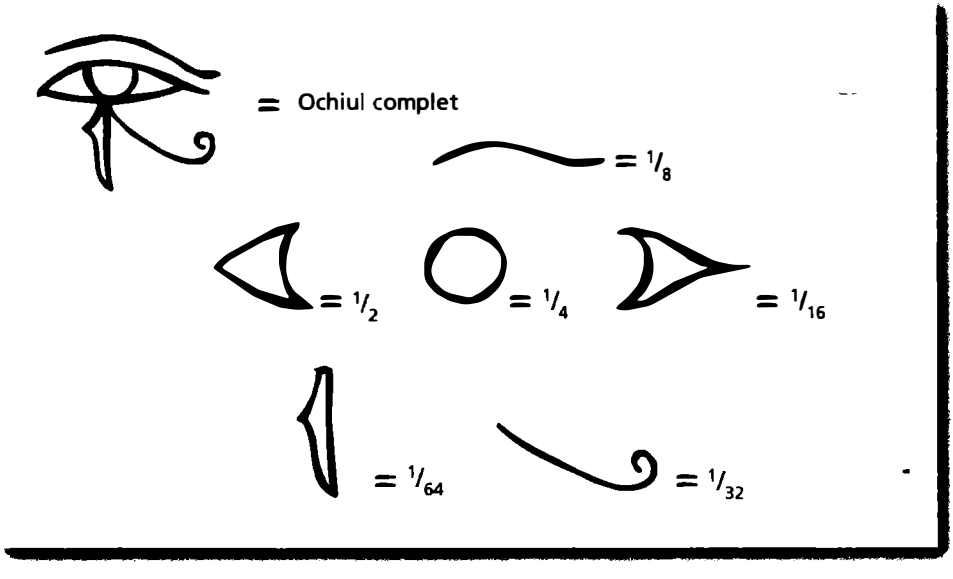
Simboluri egiptene pentru numere



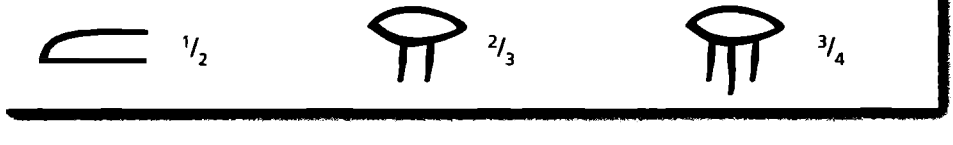


Numărul 5 724 în hieroglife egiptene.

Fracțiile le-au creat egiptenilor serioase dificultăți. În perioade diferite, ei au folosit mai multe tipuri de semne pentru fracții. În timpul Vechiului Regat, (2700–2200 î.Cr.), s-a folosit o metodă specială pentru fracțiile $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, $^1/_{32}$ și $^1/_{64}$, prin înjumătățiri repetate. Aceste simboluri foloseau porțiuni din hieroglifa „ochiul lui Horus", sau „ochiul wadjet".



Fracții speciale alcătuite din părți ale ochiului Wadjet



Simboluri speciale pentru fracții speciale

Cel mai cunoscut sistem egiptean pentru notarea fracţiilor a fost inventat în timpul Regatului de Mijloc (2000–1700 î.Cr.). El începe cu notarea oricărei fracţii de forma $1/n$, în care „n" este un întreg pozitiv. Simbolul (hieroglifa pentru litera R) este plasat deasupra simbolurilor egiptene uzuale pentru „n" . Astfel, de exemplu, $^1/_{11}$ este notat . Alte fracţii sunt apoi exprimate adunând mai multe „fracţii unitare". De pildă, $^5/_6 = {}^1/_2 + {}^1/_3$.

Interesant este că egiptenii nu scriau $^2/_5$ ca $^1/_5 + {}^1/_5$. Regula lor pare să fi fost de a folosi fracţii unitare diferite. Existau de asemenea notaţii diferite pentru unele dintre fracţiile mai simple, de pildă $^1/_2$, $^2/_3$ şi $^3/_4$.

Sistemul egiptean de notare pentru fracţii era greoi şi prost adaptat efectuării calculelor. Le slujea destul de bine pentru rapoartele oficiale, dar a fost practic ignorat de culturile ce au urmat.

Numerele şi oamenii

Fie că ne place sau nu aritmetica, e greu să ignorăm influenţa profundă pe care a exercitat-o asupra dezvoltării civilizaţiei umane. Evoluţia culturii şi cea a matematicii au mers mână în mână de-a lungul ultimelor patru milenii. Ar fi dificil să separăm cauza de efect – şi nu ştiu dacă inovaţiile matematice determină schimbări culturale sau dacă nevoile culturale determină direcţia progresului din matematică. Dar ambele afirmaţii conţin un sâmbure de adevăr, deoarece matematica şi cultura evoluează împreună.

Există totuşi o diferenţă importantă. Multe schimbări culturale sunt vizibile. Noi tipuri de locuinţe, noi forme de transport, chiar şi noi forme de organizare a administraţiei de stat sunt destul de vizibile pentru fiecare cetăţean. Matematica se desfăşoară însă mai ales în culise. Bunăoară, atunci când babilonienii foloseau observaţiile lor astronomice pentru a prezice eclipsele solare, omul de rând era impresionat de precizia cu care preoţii prevedeau aceste evenimente uimitoare, dar cei mai mulţi dintre preoţi n-aveau idee de metodele folosite. Ei ştiau să citească tăbliţele cu listele datelor eclipselor, însă important era felul în care le foloseau. Alcătuirea lor era o artă secretă, cunoscută doar de specialişti.

Unii preoţi se poate să fi avut o bună pregătire matematică – toţi scribii o aveau, iar în primii ani de studiu, preoţii urmau aceleaşi cursuri ca ei –, dar înţelegerea matematicii nu era necesară pentru a *beneficia* de avantajele care decurgeau din noile descoperiri în domeniu. Aşa a fost dintotdeauna şi fără îndoială aşa va fi mereu. Rareori matematicienilor li se recunosc meritele pentru transformarea lumii. De câte ori nu vedem că tot felul de miracole moderne sunt puse pe seama calculatoarelor, fără să se ţină cont că ele lucrează

La ce ne ajută numerele

Majoritatea mașinilor moderne sunt prevăzute cu „satnav" – dispozitiv de navigație prin satelit. Sistemele „satnav" pot fi cumpărate la un preț rezonabil. Un mic dispozitiv atașat mașinii dumneavoastră vă poate indica locul unde vă aflați în orice moment și afișează o hartă – care poate fi colorată atrăgător și chiar prezentată în perspectivă – arătând drumurile învecinate. O voce vă poate spune chiar și traseul de urmat pentru a ajunge la destinație. Dacă toate acestea par științifico-fantastice, chiar așa și sunt. O componentă esențială, care nu face parte din cutiuța atașată mașinii, este Sistemul de Localizare Globală (GPS), care cuprinde 24 de sateliți plasați pe orbite în jurul Pământului, uneori chiar mai mulți, pe măsură ce sunt lansați înlocuitori. Acești sateliți trimit semnale care pot fi folosite pentru a stabili poziția mașinii cu o precizie de câțiva metri. Matematica este implicată în multe aspecte ale rețelei GPS, dar menționăm doar una dintre ele: felul în care sunt folosite semnalele pentru a calcula poziția mașinii.

Semnalele radio se deplasează cu viteza luminii, care este de aproximativ 300 000 km/s. Un calculator aflat la bordul mașinii – un cip din cutia cumpărată – poate stabili distanța de la mașină până la oricare satelit, dacă se cunoaște durata călătoriei semnalului de la satelit până la mașină. Aceasta e în principiu de aproximativ o zecime de secundă, iar acum măsurarea precisă a timpului nu-i o problemă. Ideea e de a structura semnalul astfel încât să conțină informații despre timp. De fapt, satelitul și receptorul din mașină cântă aceeași „melodie", iar apoi se compară duratele. „Notele" care vin de la satelit vor rămâne ușor în urma celor produse în mașină. Conform acestei analogii, cele două melodii ar fost astfel:

MAȘINA: ...picioarele, în acele timpuri străvechi, pășeau în Anglia...
SATELITUL: ...Dar oare picioarele, în acele timpuri străvechi, pășeau...

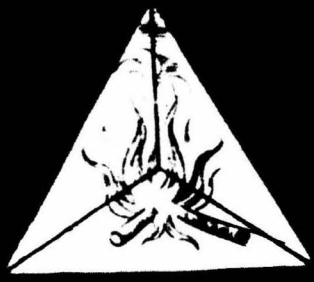
Aici melodia satelitului rămâne în urmă cu două cuvinte față de cea a mașinii. Atât satelitul cât și receptorul trebuie să genereze aceeași „melodie", iar „notele" succesive trebuie să fie distincte, astfel ca decalajul în timp să fie ușor de observat. Evident că sistemul „satnav" nu folosește chiar o melodie. Semnalul e o serie de pulsații scurte a căror durată este determinată de un „cod pseudo-aleator" . Acesta e alcătuit dintr-o serie de numere care par întâmplătoare, dar se bazează de fapt pe o regulă matematică. Atât satelitul, cât și receptorul cunosc acea regulă, astfel încât pot genera aceeași serie de pulsații.

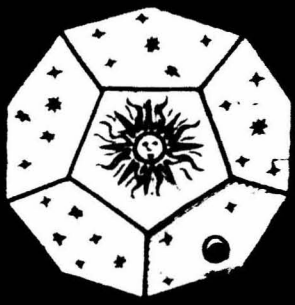
eficient doar dacă sunt programate să folosească algoritmi complicaţi, adică metode de rezolvare a problemelor, şi că de fapt majoritatea algoritmilor se întemeiază pe matematică?

Evoluţia culturii şi cea a matematicii au mers mână în mână de-a lungul ultimelor patru milenii.

Matematica vizibilă la suprafaţă este de regulă aritmetica. Inventarea calculatoarelor de buzunar ne ajută să aflăm sumele pe care le avem de plătit, iar contabilii care ne calculează contra cost impozitele împing chiar şi aritmetica în culise. Dar cei mai mulţi dintre noi îşi dau seama că aritmetica e prezentă acolo. Suntem total dependenţi de numere, fie pentru a ne cunoaşte obligaţiile legale, a ne plăti taxele, a comunica instantaneu cu celălalt capăt al Pământului, a explora suprafaţa planetei Marte sau a evalua cel mai nou medicament-minune. Toate acestea vin din anticul Babilon şi de la scribii şi dascălii care au descoperit metode eficiente de a scrie numerele şi a calcula cu ele. Ei îşi foloseau talentele matematice în principal pentru două scopuri: probleme terestre curente ale oamenilor de rând, cum ar fi măsurarea terenurilor sau contabilitatea, şi îndeletniciri pretenţioase, cum ar fi prezicerea eclipselor sau înregistrarea mişcărilor planetelor pe cerul nopţii.

La fel e şi în zilele noastre. Folosim matematica elementară, abia depăşind aritmetica, pentru nenumărate scopuri mărunte – cât deparazitant să punem în bazinul cu peşti din grădină, câte suluri de tapet sunt necesare pentru dormitor, dacă economisim bani călătorind mai mult pentru a găsi benzină mai ieftină. Iar cultura noastră foloseşte matematica sofisticată în ştiinţă, tehnologie şi tot mai mult în comerţ. Inventarea notării numerelor şi a aritmeticii se află, împreună cu limbajul şi scrierea, printre inovaţiile care ne deosebesc de maimuţele ce pot fi dresate.





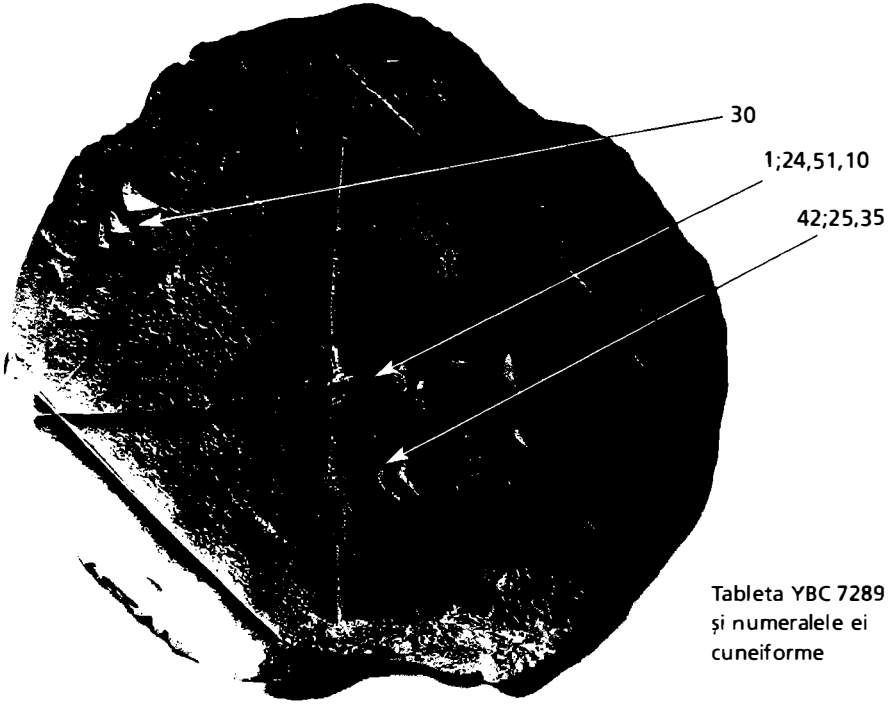
2

Primii pași în geometrie

În matematică există două tipuri principale de raționament: simbolic și vizual. Raționamentul simbolic își are originea în scrierea numerelor și vom vedea în curând cum a condus la inventarea algebrei, unde simbolurile pot reprezenta numerele în general („necunoscuta"), iar nu pe cele individuale („7"). Din Evul Mediu, matematica a început să se bazeze tot mai mult pe folosirea simbolurilor, după cum se vede dacă privești orice text de matematică modernă.

Începuturile geometriei

Pe lângă simboluri, matematicienii folosesc diagramele, care stau la baza diferitelor tipuri de raționamente vizuale. Imaginile sunt mai puțin formale decât simbolurile, iar folosirea lor a fost uneori disprețuită din acest motiv. Există credința larg răspândită că imaginea e, din punct de vedere logic, mai puțin riguroasă decât calculul simbolic. Este adevărat că imaginile lasă mai mult loc pentru diverse interpretări decât simbolurile. În plus, imaginile pot conține presupoziții ascunse – nu putem desena un triunghi „în general"; orice



Tableta YBC 7289 și numeralele ei cuneiforme

triunghi am desena, va avea o anumită formă şi mărime, care ar putea să nu fie reprezentative pentru un triunghi oarecare. Cu toate acestea, intuiția vizuală e o trăsătură atât de puternică a creierului uman, încât imaginile au un rol important în matcmatică. De fapt, ele introduc o a doua noțiune fundamentală după număr – forma.

Fascinația matematicienilor pentru forme datează de mult. Există diagrame pe tăbliţele babiloniene. De exemplu, tăbliţa catalogată ca YBC 7289 prezintă un pătrat şi două diagonale. Laturile pătratului sunt marcate de numerale cuneiforme pentru 30. Deasupra unei diagonale e notat 1; 24, 51, 10, iar sub ea 42; 25, 35, care este rezultatul înmulțirii sale cu 30, reprezentând aşadar lungimea diagonalei. Astfel 1; 24, 51, 10 este lungimea diagonalei unui pătrat mai mic, cu laturile de o unitate. Teorema lui Pitagora arată că dimensiunea diagonalei este rădăcina pătrată a lui 2, care se notează $\sqrt{2}$. Aproximarea 1; 24, 51, 10 pentru $\sqrt{2}$ e foarte bună, fiind corectă până la cea de-a şasea zecimală.

Prima folosire sistematică a diagramelor, împreună cu o folosire limitată a simbolurilor şi o doză masivă de logică, apare în scrierile de geometrie ale lui Euclid din Alexandria. Lucrările lui Euclid se înscriu în linia unei tradiții care datează cel puțin din vremea sectei pitagoreice, care a înflorit pe la 500 î.Cr., dar el a insistat asupra faptului că orice aserțiune matematică trebuie să aibă o demonstrație logică mai înainte de a fi considerată adevărată. Astfel, scrierile lui Euclid combină două inovații diferite: folosirea imaginilor şi structura logică a demonstrațiilor. Timp de secole, cuvântul „geometrie" a fost strâns legat de amândouă.

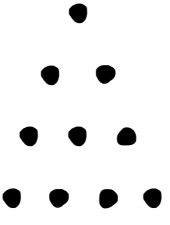
În acest capitol, urmărim istoria geometriei pornind de la Pitagora, continuând cu Euclid şi precursorul său Eudoxiu, până în perioada târzie a Greciei clasice şi a urmaşilor lui Euclid, Arhimede şi Apoloniu. Aceşti geometri din Antichitate au deschis calea gândirii vizuale în matematică. De asemenea, ei au stabilit standardele demonstrațiilor logice, care nu au fost depăşite vreme de milenii.

Pitagora

Astăzi ni se pare de la sine înțeles că matematica oferă cheia înțelegerii legilor naturii. Primul sistem de gândire cunoscut care a urmat această direcție e cel al pitagoreicilor, o sectă de orientare mistică datând de pe la 500 î.Cr. Întemeietorul ei, Pitagora, s-a născut în Samos în 569 î.Cr. Când şi unde a murit rămâne un mister, dar în 460 î.Cr. secta a fost atacată şi desființată, iar locurile ei de întrunire dărâmate şi arse. Într-unul dintre ele, casa lui Milo din Crotona, peste 50 de pitagoreici au fost masacrați. Mulți supraviețuitori s-au

refugiat la Teba, în Egiptul de Sus. Se poate ca Pitagora să fi fost printre ei, dar şi aceasta e doar o presupunere, căci, lăsând deoparte legenda, nu cunoaştem practic nimic despre el. Numele său e bine-cunoscut, în special datorită celebrei sale teoreme despre triunghiurilc dreptunghice, dar nici măcar nu ştim dacă Pitagora a demonstrat-o.

Cunoaştem mult mai multe despre filozofia şi credinţele pitagoreicilor. Ei au înţeles că matematica se referă la noţiuni abstracte, nu la realitate. Dar ei credeau de asemenea că aceste abstracţiuni erau cumva întrupate în concepte „ideale", care ţin de un tărâm straniu al imaginaţiei, aşa încât, de pildă, un cerc desenat pe nisip cu un băţ e o încercare neizbutită de a avea un cerc ideal, perfect rotund şi infinit de subţire.



Numărul zece formează un triunghi

Cea mai fecundă trăsătură a filozofiei pitagoreicilor este credinţa că universul se întemeiază pe numere. Ei au exprimat această idee printr-un simbolism mitologic, susţinând-o cu observaţii empirice. În plan mistic, ei considerau numărul 1 drept origine a tot ce există în univers.

ARMONIA LUMII

Principala dovadă empirică pentru ideea pitagoreicilor de univers bazat pe numere venea din muzică, în care ei au observat anumite legături remarcabile între sunetele armonioase şi rapoartele numerice simple. Prin experimente simple, ei au descoperit că, dacă o coardă produce o notă de un anumit ton, atunci o coardă având jumătate din lungimea primeia produce o notă extrem de armonioasă, numită acum octavă. O coardă cu lungimea de două treimi din prima produce o a doua notă în ordinea armoniei, iar una cu lungimea de trei sferturi din prima produce de asemenea o notă armonioasă.

În prezent aceste aspecte numerice ale muzicii ţin de fizica vibraţiei corzilor, care se mişcă după anumite tipare ale undelor. Numărul de unde care pot intra într-o lungime dată a corzii e un număr întreg, iar aceste numere întregi determină rapoarte numerice simple. Dacă numerele nu alcătuiesc un raport simplu, atunci notele corespunzătoare interferă formând „bătăi" disonante, neplăcute auzului. În realitate lucrurile sunt mai complicate, intrând în joc şi sunetele cu care creierul s-a obişnuit, dar în spatele descoperirii lui Pitagora se află evident o explicaţie fizică.

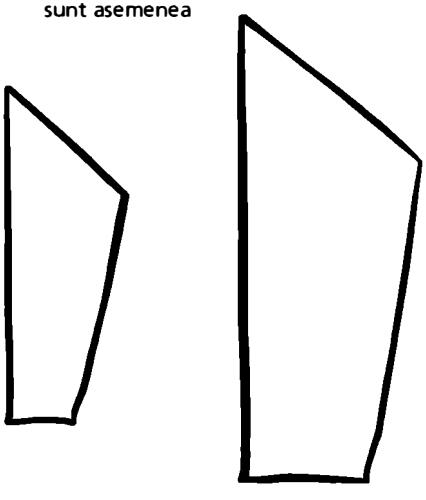
Numerele 2 şi 3 simbolizau principiile feminin şi masculin. Numărul 4 simboliza armonia şi de asemenea cele patru elemente (pământ, aer, foc, apă) din care e alcătuit totul. Pitagoreicii credeau că numărul 10 are o semnificaţie mistică profundă, deoarece 10 = 1 + 2 + 3 + 4, asociind unitatea primordială, principiul feminin, principiul masculin şi cele patru elemente. Mai mult, aceste numere formează un triunghi, iar întreaga geometrie greacă se baza pe proprietăţile triunghiurilor.

Pitagoreicii recunoşteau existenţa a nouă corpuri cereşti: Soarele, Luna, Mercur, Venus, Pământul, Marte, Jupiter şi Saturn, precum şi Focul Central, care era diferit de Soare. Numărul 10 era atât de important în viziunea lor cosmogonică, încât credeau că exista un al zecelea corp, „Anti-Pământul", ascuns mereu în spatele Soarelui.

După cum am văzut, numerele întregi 1, 2, 3, ... conduc în mod firesc spre un al doilea tip de numere, fracţiile, numite de matematicieni *numere raţionale*. Un număr raţional este o fracţie a/b, unde a şi b sunt numere întregi (iar b este diferit de 0, altfel fracţia nu ar avea sens). Fracţiile divid numerele întregi în părţi oricât de mici, astfel încât, de pildă, lungimea unui segment dintr-o figură geometrică poate fi aproximată oricât de bine dorim printr-un număr raţional. Pare firesc să ne închipuim că, după un număr suficient de subîmpărţiri, vom ajunge la numărul exact; dacă aşa ar sta lucrurile, atunci toate lungimile ar fi raţionale.

În acest caz, geometria ar deveni mult mai simplă, deoarece oricare două lungimi ar fi multipli de numere întregi ai unei lungimi comune (mică) şi ar fi obţinute punând laolaltă multe exemplare ale acelei lungimi mici. Faptul ar putea să nu pară prea important, dar ar simplifica mult întreaga teorie a lungimilor, ariilor şi în special a figurilor asemenea – figuri cu aceeaşi formă, dar de dimensiuni diferite. Orice ar putea fi demonstrat folosind diagrame alcătuite din nenumărate exemplare ale unei forme elementare.

Aceste două forme sunt asemenea



Din păcate, acest vis e irealizabil. Conform unei legende, un discipol al lui Pitagora, Hippasos din Metapont, a descoperit că afirmaţia e falsă. El a demonstrat că diagonala unui pătrat unitate (un pătrat cu latura de o unitate)

este un număr irațional, adică nu reprezintă o fracție exactă. Se spune (mărturia nu e sigură, dar povestea e frumoasă) că ar fi făcut greşeala de a-şi anunța descoperirea pe când pitagoreicii traversau Mediterana pe o corabie, iar colegii lui de sectă s-au mâniat atât de tare încât l-au aruncat peste bord, iar el s-a înecat. E mai probabil să fi fost doar alungat din sectă. Oricare ar fi fost pedeapsa, se pare că pitagoreicii nu s-au bucurat de descoperirea sa.

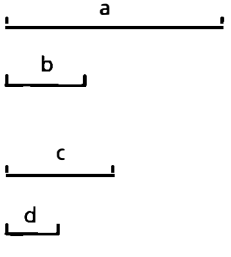
Interpretarea modernă a constatării lui Hippasos este aceea că $\sqrt{2}$ e un număr irațional. Pentru pitagoreici, a fost o lovitură de grație dată credinței lor cvasireligioase că universul se întemeiază pe numere – prin care ei înțelegeau numere întregi. Fracțiile – rapoarte de numere întregi – se încadrau destul de bine în această perspectivă asupra lumii, dar nu şi acele numere care se dovedeau a nu fi fracții. Aşa încât, fie înecat, fie alungat, s-ar putea spune că bietul Hippasos a devenit una dintre primele victime ale iraționalului credinței religioase.

Domesticirea numerelor iraționale

În cele din urmă, grecii au descoperit o metodă de a opera cu numerele iraționale. Aceasta funcționa deoarece orice număr irațional poate fi aproximat printr-un număr rațional. Cu cât aproximarea este mai bună, cu atât numărul rațional devine mai complicat şi există mereu o doză de imprecizie. Dar pe măsură ce imprecizia devine mai mică, proprietățile numerelor iraționale pot fi abordate pe baza proprietăților analoge ale numerelor raționale care le aproximează. Problema constă în a exprima această idee astfel încât să fie compatibilă cu felul în care vedeau grecii geometria şi demonstrația, ceea ce s-a dovedit a fi cu putință, deşi într-un mod complicat.

Teoria greacă a numerelor iraționale a fost elaborată de Eudoxiu pe la 370 î.Cr. Ideea sa era de a reprezenta orice mărime, rațională sau irațională, ca raportul a două lungimi – aşadar, printr-o pereche de lungimi. Astfel, două treimi se reprezintă prin două segmente, unul de lungime doi şi celălalt de lungime trei (un raport de 2:3). În mod asemănător, $\sqrt{2}$ se reprezintă printr-o pereche formată din diagonala unui pătrat unitate şi latura acestuia (un raport $\sqrt{2}/1$). Observați că ambele perechi de segmente pot fi construite geometric.

Este raportul a:b
același cu raportul c:d?



Esențial e să stabileşti când sunt *egale* două asemenea rapoarte. Când este $a:b = c:d$? Deoarece le lipsea

sistemul numeric adecvat, grecii nu puteau realiza aceasta împărțind o lungime la alta și comparând $a \div b$ cu $c \div d$. Eudoxiu a descoperit în schimb o metodă de comparație anevoioasă, dar precisă, care se putea încadra în convențiile geometriei grecești. Ideea constă în a compara a și c alcătuind multipli *întregi* ma și nc. Aceasta se poate realiza punând cap la cap m exemplare ale lui a și n exemplare ale lui c. Apoi se folosesc aceiași doi multipli m și n pentru a compara mb și nd. Eudoxiu susține că dacă rapoartele $a:b$ și $c:d$ nu sunt egale, atunci putem folosi m și n pentru a accentua diferența, așa încât $ma > nc$, dar $mb < nd$. Într-adevăr, putem *defini* astfel egalitatea rapoartelor.

Teoria greacă a numerelor iraționale a fost elaborată de Eudoxiu pe la 370 î.Cr.

Folosirea acestei definiții cere puțin exercițiu. Ea corespunde strict operațiilor limitate permise în geometria greacă. Totuși, funcționează; ea i-a ajutat pe geometrii greci să extindă la rapoarte iraționale teoreme ce puteau fi cu ușurință demonstrate pentru rapoarte raționale.

Deseori ei foloseau o metodă numită „epuizare", care le permitea să demonstreze teoreme pe care noi le-am demonstra astăzi folosind noțiunea de limită și analiza matematică. Astfel ei au demonstrat că aria cercului e proporțională cu pătratul razei. Demonstrația pornește de la un fapt simplu, descoperit la Euclid: ariile a două *poligoane* asemenea sunt în același raport ca pătratele laturilor corespunzătoare. Cercul pune noi probleme, deoarece nu e poligon. De aceea grecii au considerat două șiruri de poligoane regulate având vârfurile pe cerc: unele în interiorul cercului, celelalte în exterior. Ambele șiruri se apropie tot mai mult de forma cercului, iar definiția lui Eudoxiu arată că raportul ariilor celor două tipuri de poligoane aproximatoare este egal cu cel al ariilor cercurilor.

Euclid

Cel mai cunoscut geometru grec, deși probabil nu și cel mai original, a fost Euclid din Alexandria. El a realizat o amplă sinteză, iar tratatul său de geometrie, *Elementele*, a devenit un bestseller al tuturor timpurilor. Euclid a scris cel puțin zece tratate de matematică, dar numai cinci s-au păstrat – toate fiind copii ulterioare, iar unele parțiale. Nu avem textele originale din Grecia antică. Cele cinci tratate euclidiene rămase sunt: *Elementele*, *Împărțirea figurilor*, *Datele*, *Fenomenele* și *Optica*.

Elementele sunt capodopera geometrică a lui Euclid și oferă o tratare completă a geometriei în două dimensiuni (planul) și în trei dimensiuni (spațiul).

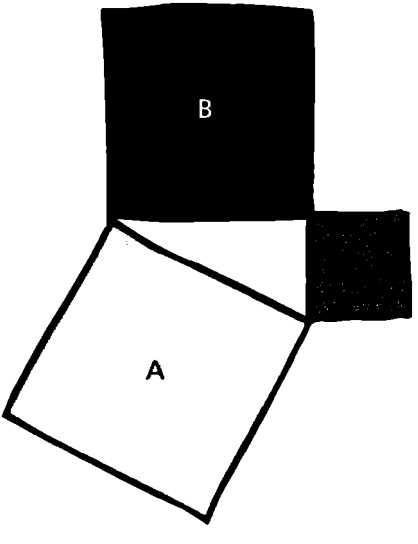
Împărțirea figurilor și *Datele* conțin diverse adăugiri și comentarii la geometrie. *Fenomenele* e destinată astronomilor și se ocupă de geometria sferică, geometria figurilor de pe suprafața unei sfere. *Optica* este de asemenea o lucrare de geometrie și poate fi considerată ca o primă abordare a geometriei perspectivei – felul în care ochiul omenesc transformă o scenă tridimensională într-o imagine bidimensională.

Probabil că înțelegem cel mai bine contribuția lui Euclid examinând logica relațiilor spațiale. Dacă o formă are anumite proprietăți, acestea pot implica în mod logic alte proprietăți. De exemplu, dacă un triunghi are toate cele trei laturi egale – un triunghi echilateral –, atunci toate cele trei unghiuri trebuie să fie egale. Acest tip de afirmație, înșirând anumite presupuneri și enunțând apoi consecințele lor logice, se numește teoremă. Această teoremă particulară leagă o proprietate a laturilor triunghiului de o proprietate a unghiurilor sale. Un exemplu mai puțin intuitiv, dar mai celebru, este Teorema lui Pitagora.

Elementele se împart în 13 cărți, într-o succesiune logică. Ele prezintă geometria în plan și unele aspecte ale geometriei în spațiu. Punctul culminant e demonstrația că există exact cinci corpuri regulate: tetraedrul, cubul, octaedrul, dodecagonul și icosaedrul. Formele de bază permise în geometria plană sunt liniile drepte și cercurile, adesea combinate – de exemplu, un triunghi este alcătuit din trei linii drepte. În geometria în spațiu mai întâlnim plane, cilindri și sfere.

Pentru matematicienii moderni, cel mai interesant lucru în geometria lui Euclid nu este conținutul ei, ci structura logică. Spre deosebire de înaintași, Euclid nu se mulțumește să afirme că o teoremă e adevărată. El dă o demonstrație.

Ce este o demonstrație? E un fel de poveste matematică, în care fiecare pas e consecința logică a unor pași anteriori. Fiecare afirmație făcută trebuie să fie justificată prin raportarea ei la afirmații precedente și prin dovedirea faptului că e o consecință logică a lor. Euclid și-a dat seama că acest procedeu nu regresa la infinit: el trebuie să înceapă de undeva, iar acele afirmații inițiale nu pot fi demonstrate – altminteri procesul demonstrației ar începe din alt punct.



Teorema lui Pitagora: dacă triunghiul are un unghi drept, atunci pătratul mai mare, A, are aceeași arie ca a celorlalte două, B și C, luate împreună.

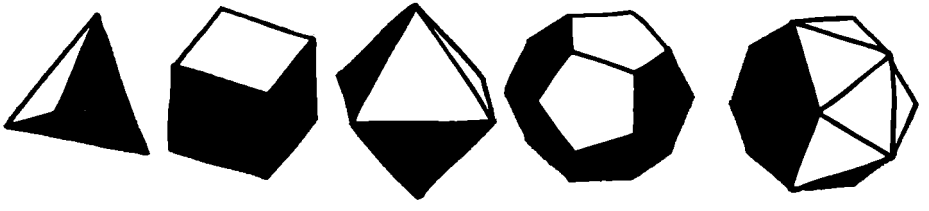
Euclid a început prin a înşirui un număr de definiţii: enunţuri clare, precise privind înţelesul anumitor termeni tehnici, cum sunt *dreapta* sau *cercul*. O definiţie tipică e, de exemplu, „un unghi obtuz este un unghi mai mare decât unghiul drept". Definiţiile i-au oferit terminologia de care avea nevoie pentru a-şi enunţa afirmaţiile nedemonstrate, pe care le-a clasificat în două categorii: *idei comune* şi *postulate*. O idee comună tipică este: „lucrurile care sunt egale cu acelaşi lucru sunt egale între ele". Un postulat tipic este: „toate unghiurile drepte sunt egale între ele".

În prezent, noi am contopit aceste două categorii şi le-am numi axiome. Axiomele unui sistem matematic sunt presupunerile de bază pe care le facem despre el. Considerăm axiomele drept regulile jocului şi insistăm ca jocul să

POLIEDRE REGULATE

Un corp tridimensional este *regulat* (sau *platonic*) dacă e alcătuit din feţe identice, aranjate în acelaşi fel la fiecare vârf, fiecare faţă fiind un poligon regulat. Pitagoreicii cunoşteau cinci asemenea corpuri.

Cele cinci corpuri platonice



tetraedru	cub	octaedru	dodecaedru	icosaedru
Pământul	**Apa**	**Aerul**	**Focul**	**Chintesenţa**

- **Tetraedrul, alcătuit din patru triunghiuri echilaterale**
- **Cubul (hexaedrul), alcătuit din şase pătrate**
- **Octaedrul, alcătuit din opt triunghiuri echilaterale**
- **Dodecaedrul, alcătuit din 12 pentagoane regulate**
- **Icosaedrul, alcătuit din 20 de triunghiuri echilaterale**

Ei le-au asociat cu cele patru elemente ale Antichităţii – pământul, apa, aerul şi focul – şi cu un al cincilea, chintesenţa, care înseamnă al cincilea element.

se desfăşoare conform acestor reguli. Nu ne mai întrebăm dacă regulile sunt adevărate – nu mai credem că se poate juca doar un singur joc. Cine vrea să joace acel joc trebuie să accepte regulile; dacă n-o face, e liber să joace alt joc, dar el va fi diferit de cel determinat de acele reguli particulare.

Pe vremea lui Euclid, şi timp de încă aproape 2000 de ani, matematicienii nu gândeau deloc aşa. În genere, ei considerau axiomele drept adevăruri de la sine înţelese, atât de evidente, încât nimeni nu se putea îndoi de ele. Astfel, Euclid a făcut tot posibilul pentru ca toate axiomele sale să fie evidente – şi aproape că a reuşit. Dar una dintre axiome, cea „a paralelelor", e extrem de complicată şi neintuitivă, iar mulţi au încercat s-o deducă din presupuneri mai simple. Vom vedea mai târziu la ce descoperiri remarcabile a condus aceasta.

Pornind de la acest început modest, *Elementele* au început să furnizeze, pas cu pas, demonstraţii pentru teoreme geometrice din ce în ce mai sofisticate. De exemplu, Propoziţia 5 din Cartea I demonstrează că unghiurile de la baza unui triunghi isoscel (unul cu două laturi egale) sunt egale. Această teoremă era cunoscută generaţiilor de elevi ai perioadei victoriene drept *pons asinorum*, sau puntea măgarilor: figura seamănă cu un pod şi a fost primul obstacol serios pentru elevii care încercau să înveţe pe dinafară lecţia în loc s-o înţeleagă. Propoziţia 32 din Cartea I demonstrează că suma unghiurilor unui triunghi este de 180°. Propoziţia 47 din Cartea I e Teorema lui Pitagora.

Euclid a dedus fiecare teoremă din teoreme anterioare şi din diverse axiome. El a construit un turn al logicii, care urca tot mai sus către cer, având axiomele drept fundament, iar deducţia logică fiind mortarul care ţine cărămizile laolaltă.

Astăzi suntem mai puţin mulţumiţi de logica lui Euclid, deoarece ea are multe lacune. Euclid consideră multe lucruri de la sine înţelese; lista lui de axiome nu e nici pe departe completă. Spre exemplu, poate părea evident că dacă o linie trece printr-un punct situat în interiorul unui cerc, atunci va trebui să intersecteze cercul undeva – cel puţin dacă e prelungită suficient de departe. Cu siguranţă că pare evident când desenezi figura, dar există exemple care ne arată că aceasta *nu* rezultă din axiomele lui Euclid. Euclid s-a descurcat minunat, însă a presupus că trăsături aparent evidente ale figurilor nu necesitau nici demonstraţie, nici o bază axiomatică.

Omisiunea e mai gravă decât poate părea. Există exemple celebre de raţionament greşit decurgând din erori subtile legate de figuri. Unul dintre ele „demonstrează" că toate triunghiurile au două laturi egale.

Euclid din Alexandria

325–265 î.Cr.

Euclid este celebru datorită cărții sale de geometrie, *Elementele*, o lucrare importantă – de fapt dominantă – în predarearea matematicii timp de două milenii. Cunoaștem foarte puține despre viața lui Euclid. El a predat matematica la Alexandria. Pe la 45 d.Cr., filozoful grec Proclos scria: „Euclid a trăit în vremea primului Ptolemeu, deoarece Arhimede, care a urmat curând după primul Ptolemeu, îl menționează pe Euclid. [...] Ptolemeu l-a întrebat odată [pe Euclid] dacă există o cale mai scurtă de a studia geometria decât parcurgerea *Elementelor*, iar el a răspuns că nu există o cale regală către geometrie. De aceea, el este ulterior cercului lui Platon, dar anterior lui Eratostene și Arhimede [...] el a fost platonician, simpatizând această filozofie, căci și-a încheiat *Elementele* cu construcția așa-numitelor figuri platonice [corpuri geometrice regulate]."

Secțiunea de aur

Cartea a V-a a *Elementelor* adoptă o direcție oarecum obscură, diferită de cea a Cărților I–IV. Nu seamănă cu geometria obișnuită. De fapt, la prima vedere, pare abracadabrantă. Ce să înțelegem, de pildă, din Propoziția I a Cărții a V-a? Ea spune: *Dacă anumite mărimi sunt echimultipli ai altor mărimi, atunci orice multiplu ar fi una dintre mărimi față de una dintre celelalte, acel multiplu ar fi de asemenea și față de toate celorlalte.*

Limbajul (pe care l-am simplificat puțin) nu ajută, dar demonstrația lămurește ce vrea să spună Euclid. Matematicianul englez din secolul XIX Augustus De Morgan a explicat această idee în manualul său de geometrie folosind un limbaj simplu: „Zece picioare și zece țoli fac de zece ori un picior și un țol."

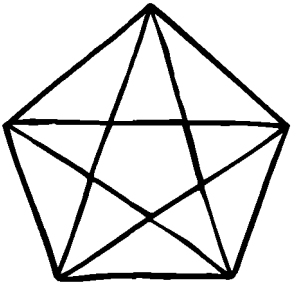
Ce vrea să spună aici Euclid? Sunt oare banalități deghizate în teoreme? Sau aberații mistice? Câtuși de puțin. Acest pasaj poate părea obscur, dar conduce la partea cea mai profundă a *Elementelor*: tehnica lui Eudoxiu de a opera cu rapoarte irațională. Acum matematicienii preferă să opereze cu numere, iar pentru că ele sunt mai familiare, voi interpreta deseori ideile grecești în acest limbaj.

Sunt oare banalităţi deghizate în teoreme? Câtuşi de puţin.

Euclid nu a putut evita să se confrunte cu dificultăţile numerelor iraţionale, deoarece punctul culminant al *Elementelor* – şi, după cum cred mulţi, obiectivul principal – era demonstraţia faptului că există exact cinci poliedre regulate: tetraedrul, cubul (sau hexaedrul), octaedrul, dodecaedrul şi icosaedrul. Euclid a demonstrat două lucruri: nu există alte corpuri regulate, iar acestea cinci există efectiv – ele pot fi construite geometric, iar feţele lor se potrivesc perfect între ele, fără cea mai mică eroare.

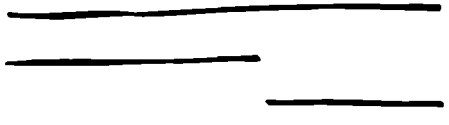
Două dintre poliedrele regulate, dodecaedrul şi icosaedrul, implică pentagonul regulat: dodecaedrul are feţele pentagonale, iar cele cinci feţe ale icosaedrului înconjurând orice vârf formează un pentagon. Pentagoanele regulate sunt direct legate de ceea ce Euclid numea „medie şi extremă raţie". Pe un segment AB, construiţi un punct C, astfel încât raportul $AB{:}AC$ să fie egal cu $AC{:}BC$. Aşadár, întregul segment se află în aceeaşi proporţie cu segmentul mai mare precum segmentul mai mare cu segmentul mai mic. Dacă trasaţi un pentagon şi înscrieţi în el o stea cu cinci colţuri, laturile acesteia şi laturile pentagonului se află tocmai în acest raport.

În prezent numim acest raport *secţiunea de aur*. El este egal cu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi e un număr iraţional. Valoarea sa numerică este aproximativ 1,618. Grecii puteau demonstra că este iraţional folosind geometria pentagonului. Astfel, Euclid şi predecesorii lui erau conştienţi că, pentru o înţelegere adecvată a dodecaedrului şi a icosaedrului, trebuie să se confrunte cu numerele iraţionale.



Raportul dintre diagonale şi laturi este egal cu secţiunea de aur

Aceasta este, cel puţin, perspectiva convenţională asupra *Elementelor*. David Fowler susţine în cartea sa *Matematica academiei lui Platon* că există şi o altă perspectivă – care, în esenţă, este exact cea inversă. Probabil că scopul principal al lui Euclid era teoria numerelor iraţionale, iar corpurile regulate erau doar o simplă aplicaţie.



Media şi extrema raţie (numită astăzi secţiunea de aur). Raportul dintre segmentul de sus şi cel median este egal cu cel dintre segmentul median şi cel de jos.

Dovezile pot fi interpretate în ambele sensuri, dar una dintre trăsăturile *Elementelor* pledează pentru teoria alternativă. Mare parte din materialul privind teoria numerelor nu e necesar pentru clasificarea poliedrelor regulate – aşadar de ce l-a inclus Euclid? Acelaşi material e însă strâns legat de numerele iraţionale, ceea ce poate explica includerea sa.

Arhimede

Cel mai mare matematician al Antichităţii a fost Arhimede. El a avut contribuţii importante în geometrie, s-a aflat în avangarda aplicării matematicii la lumea naturală şi a fost un inginer desăvârşit. Dar el va rămâne mereu în amintirea matematicienilor pentru lucrarea sa despre cercuri, sfere şi cilindri, pe care acum o asociem cu numărul π („pi"), aproximativ egal cu 3,14159. Desigur, grecii nu lucrau direct cu numărul π: ei îl reprezentau geometric ca raportul dintre circumferinţa cercului şi diametrul său.

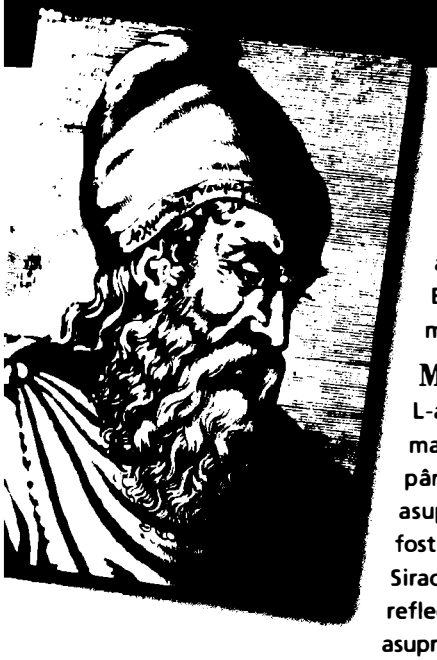
Culturile mai vechi înţeleseseră că circumferinţa cercului e totdeauna acelaşi multiplu al diametrului său şi că acest multiplu este aproximativ 3, poate puţin mai mare. Babilonienii foloseau $3\ ^1/_8$. Dar Arhimede a mers mult mai departe; rezultatele sale erau însoţite de demonstraţii riguroase, în spiritul lui Eudoxiu. Din câte ştiau grecii, raportul dintre perimetrul cercului şi diametrul său putea fi iraţional. Ştim acum că aşa este, dar demonstraţia a fost dată abia în 1770 de Johann Heinrich Lambert. (Valoarea de $3\ ^1/_7$, predată în şcoli, e convenabilă, dar aproximativă.) Din moment ce Arhimede nu a reuşit să demonstreze că π e raţional, el a trebuit să accepte că s-ar putea să nu fie.

Geometria greacă opera cel mai bine cu poligoane – figuri alcătuite din linii drepte. Dar cercul e curb, aşa încât Arhimede l-a studiat folosind poligoane care să-l aproximeze. Pentru a estima valoarea lui π, el a comparat perimetrul cercului cu perimetrele a două serii de poligoane: o serie situată în interiorul cercului, iar cealaltă în exterior. Perimetrele poligoanelor din interiorul cercului trebuie să fie mai mici decât cercul, în timp ce perimetrele celor din exterior trebuie să fie mai mari. Pentru a uşura calculele, Arhimede şi-a trasat poligoanele secţionând repetat unghiurile unui hexagon regulat (poligon cu şase laturi) şi obţinând astfel poligoane regulate cu 12, 24, 48 de laturi etc. S-a oprit la cel cu 96 de laturi. Calculele sale au demonstrat că $3\ ^{10}/_{71} < \pi < 3\ ^1/_7$; adică π se situează undeva între între 3,1408 şi 3,1429, conform notaţiei zecimale actuale.

Studiile lui Arhimede asupra sferei prezintă un interes deosebit, deoarece cunoaştem atât demonstraţia sa riguroasă, cât şi calea prin care a descoperit-o – categoric neriguroasă. Demonstraţia apare în cartea sa *Despre sferă şi cilindru.*

Arhimede din Siracusa

287–212 î.Cr.

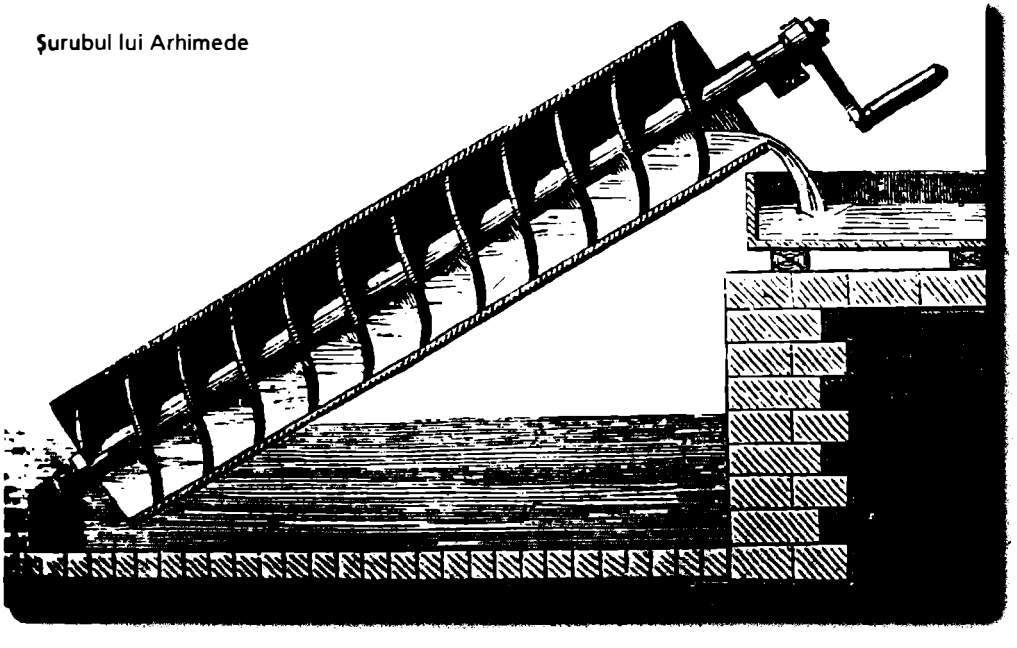


Arhimede s-a născut la Siracusa, fiind fiul astronomului Phidias. A vizitat Egiptul, unde se presupune că a inventat şurubul arhimedic, folosit până de curând pentru a ridica apa Nilului pentru irigaţii. L-a vizitat probabil pe Euclid la Alexandria; coresponda fără îndoială cu matematicienii din Alexandria.

Marele său talent matematic a fost multilateral. L-a folosit şi în scopuri practice, construind maşinării de război gigantice, bazate pe „legea pârghiei" enunţată de el, care puteau azvârli asupra inamicilor pietroaie uriaşe. Maşinăriile au fost folosite cu succes când romanii au asediat Siracuza în 212 î.Cr. El a folosit chiar şi geometria reflecţiei optice pentru a focaliza razele soarelui asupra flotei romane invadatoare, incendiind corăbiile.

Cărţile rămase de la el (doar sub formă de copii ulterioare) sunt *Despre echilibrele planurilor*, *Cvadratura parabolei*, *Despre sferă şi cilindru*, *Despre spirale*, *Despre conoizi şi sferoizi*, *Despre plutirea corpurilor*, *Măsurarea cercului* şi *Clepsidra*, precum şi *Metoda*, descoperită în 1906 de Johan Heiberg.

Şurubul lui Arhimede



PI CU MARE EXACTITATE

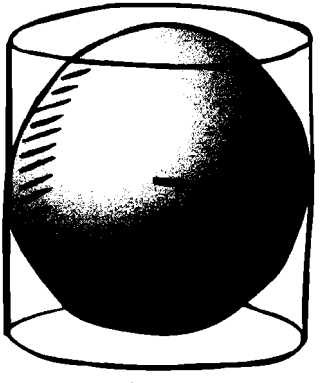
Valoarea lui π a fost calculată acum cu câteva miliarde de zecimale, folosindu-se metode mai sofisticate. Asemenea calcule sunt importante pentru metodele lor, spre a verifica sistemele calculatoarelor, cât şi din pură curiozitate, însă rezultatul în sine nu are mare importanţă. Aplicaţiile practice ale numărului π necesită cel mult cinci sau şase zecimale. Recordul actual este de 1,24 bilioane de zecimale, calculate de Yasumasa Kanada şi o echipă de nouă specialişti în decembrie 2007. Calculul a durat 600 de ore, folosindu-se un supercalculator Hitachi SR8000.

El arată că volumul unei sfere reprezintă două treimi din volumul cilindrului circumscris, iar ariile suprafeţelor sferei şi cilindrului situate între oricare două plane paralele sunt egale. În termeni actuali, Arhimede a demonstrat că volumul sferei este $4/3\ \pi r^3$, unde r este raza, iar aria sa este $4\ \pi r^2$. Aceste cunoştinţe fundamentale sunt valabile şi azi.

Demonstraţia este o iscusită utilizare a „epuizării". Metoda are un neajuns important: trebuie să cunoşti răspunsul înainte de a încerca să-l demonstrezi. Timp de secole, savanţii nu au ştiut cum a reuşit Arhimede să ghicească răspunsul. Dar în 1906 istoricul danez Heiberg a studiat un pergament din secolul al XIII-lea, conţinând textele unor rugăciuni. El a observat urme slabe ale unei inscripţii anterioare, care fusese ştearsă pentru a face loc rugăciunilor. Astfel a descoperit că documentul originar era o copie a unor lucrări ale lui Arhimede, dintre care unele necunoscute. Un asemenea document se numeşte palimpsest – un pergament în care scrieri mai recente sunt suprapuse peste unele anterioare, care au fost şterse. (Uimitor e că acelaşi manuscris conţine şi lucrări pierdute ale altor doi autori antici.) O lucrare a lui Arhimede, *Metoda teoremelor mecanice*, explică cum a reuşit el să ghicească volumul sferei. Ideea era de a secţiona sfera cât mai fin şi a plasa secţiunile obţinute pe talgerul unei balanţe, iar pe celălalt talger, secţiunile similare ale unui cilindru şi ale unui con – ale căror volume Arhimede le cunoştea deja. Legea pârghiilor conduce la aflarea valorii volumului. Pergamentul a fost vândut în 1998 unui particular cu două milioane de dolari.

Probleme pentru greci

Geometria greacă avea limitele ei, dintre care unele au fost depăşite prin introducerea unor noi metode şi concepte. Euclid a restrâns construcţiile geometrice permise la cele făcute cu rigla negradată şi o pereche de compasuri (de fapt, „compas" – cuvântul „pereche" e necesar din punct de vedere tehnic, din acelaşi motiv pentru care spunem că tăiem hârtia cu o „pereche" de foarfeci, dar haideţi să nu fim pedanţi). Se spune că ar fi impus acest lucru, dar el apare implicit în construcţiile sale, iar nu ca regulă explicită. Cu instrumente suplimentare – idealizate la fel cum curba trasată cu un compas e considerată un cerc perfect – sunt posibile noi construcţii.

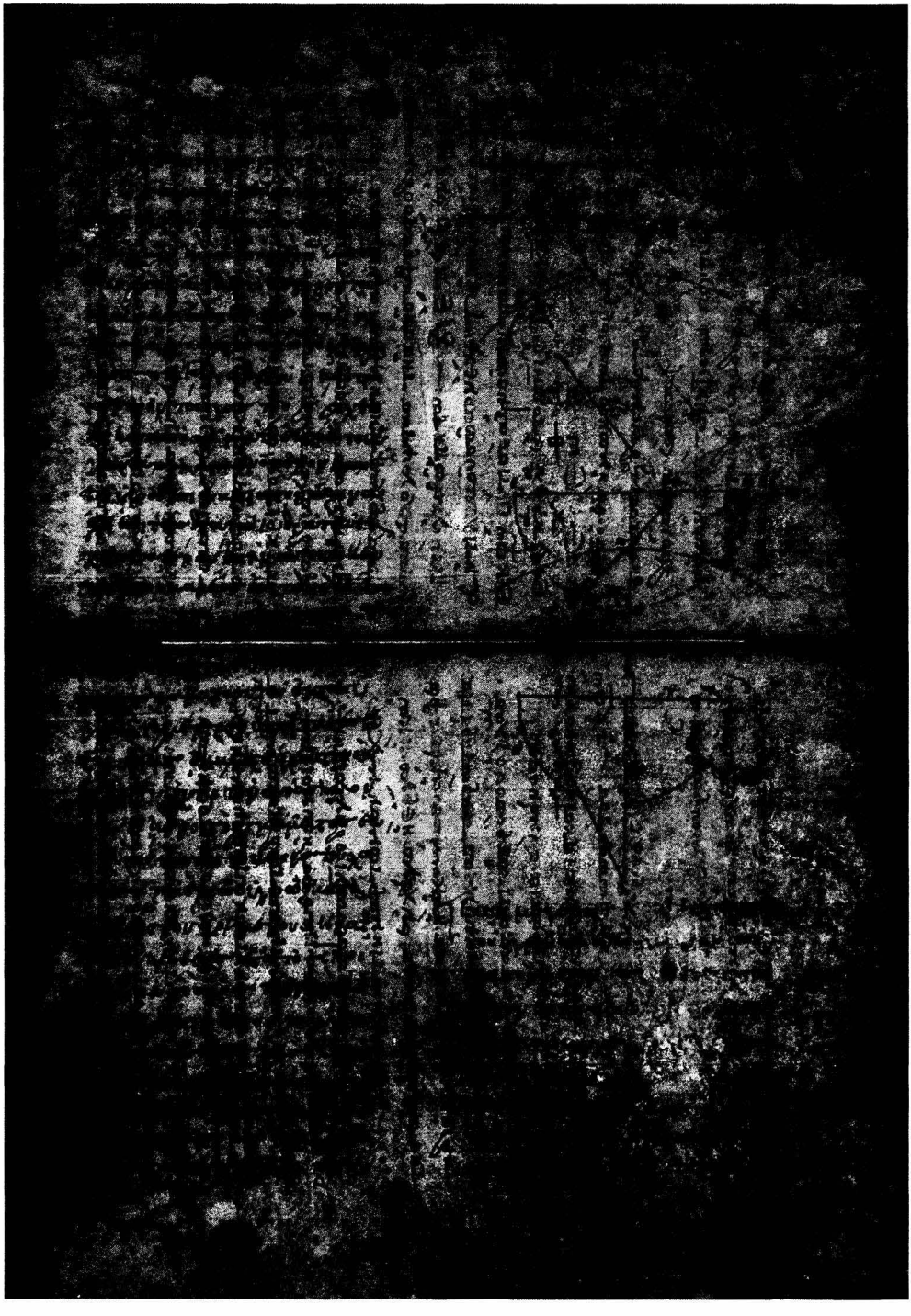


Sfera şi cilindrul circumscris

Arhimede ştia, de pildă, că un unghi poate fi trisecţionat folosind o riglă cu două puncte marcate pe ea. Grecii numeau asemenea procedee „construcţii *neusis*". Ştim acum (ceea ce grecii trebuie să fi bănuit) că trisecţionarea unui unghi cu rigla şi compasul e imposibilă, aşa încât contribuţia lui Arhimede extinde într-adevăr limitele posibilului. Alte două probleme faimoase din acea vreme sunt dublarea unui cub (construirea unui cub al cărui volum este dublul celui iniţial) şi cvadratura cercului (construirea unui pătrat de aceeaşi arie cu un cerc dat). Se ştia de asemenea că erau imposibil de realizat cu rigla şi compasul.

O extindere importantă a operaţiilor permise în geometrie – care a dat roade în studiile arabe de pe la 800 d.Cr. privind ecuaţia cubică şi a avut aplicaţii în mecanică şi astronomie – a fost introducerea unei noi clase de curbe, *secţiunile conice*. Aceste curbe, extrem de importante în istoria matematicii, sunt obţinute prin secţionarea unui con dublu cu un plan. Astăzi le numim conice. Ele sunt de trei tipuri:

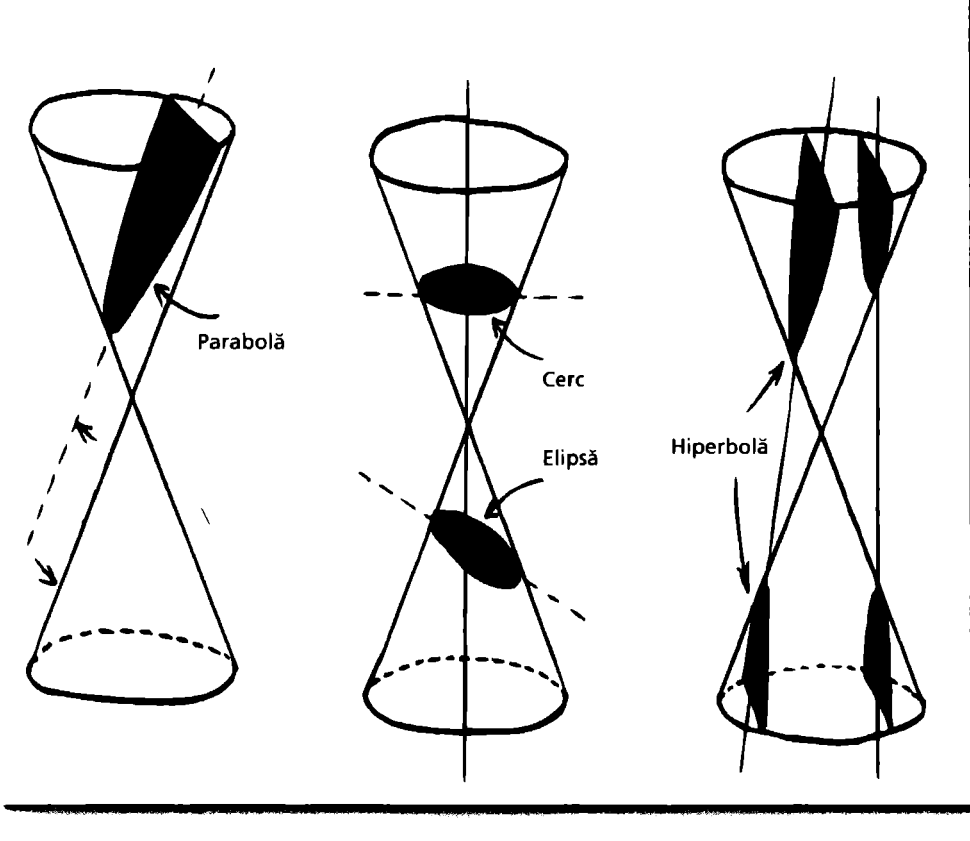
- Elipsa, o curbă ovală închisă obţinută atunci când planul de secţiune intersectează doar o jumătate a conului. Cercurile sunt cazuri particulare de elipse.
- Hiperbola, o curbă cu două ramuri care merg spre infinit, obţinută când planul intersectează ambele jumătăţi ale conului.
- Parabola, o curbă de tranziţie între elipse şi hiperbole, în sensul că e paralelă cu o dreaptă trecând prin vârful conului şi situată pe con. Parabola are doar o ramură, care se extinde însă la infinit.



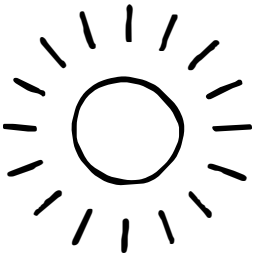
Palimpsestul lui Arhimede

Secțiunile conice au fost studiate în detaliu de Apoloniu din Pergam, care a călătorit din Asia Mică la Alexandria pentru a studia sub îndrumarea lui Euclid. Lucrarea sa fundamentală, *Secțiunile conice*, de pe la 230 î.Cr., conține 487 de teoreme. Euclid și Arhimede studiaseră anumite proprietăți ale conurilor, dar era nevoie de o întreagă carte pentru a cuprinde teoremele lui Apoloniu. O idee importantă merită menționată. Aceasta se referă la noțiunea de *focare* ale unei elipse (sau hiperbole). Focarele reprezintă două puncte speciale asociate acestor două tipuri de conice. Dintre numeroasele lor proprietăți, menționăm doar una: distanța de la un focar al unei elipse la un punct oarecare și înapoi la celălalt focar e constantă (fiind egală cu diametrul mare al elipsei). Focarele unei hiperbole au o proprietate similară, dar considerând diferența dintre cele două distanțe. Grecii știau să trisecționeze unghiuri și să dubleze cubul folosind conicele. Iar cu ajutorul altor curbe speciale, în particular al cuadraticei, puteau să realizeze și cuadratura cercului.

Secțiuni conice

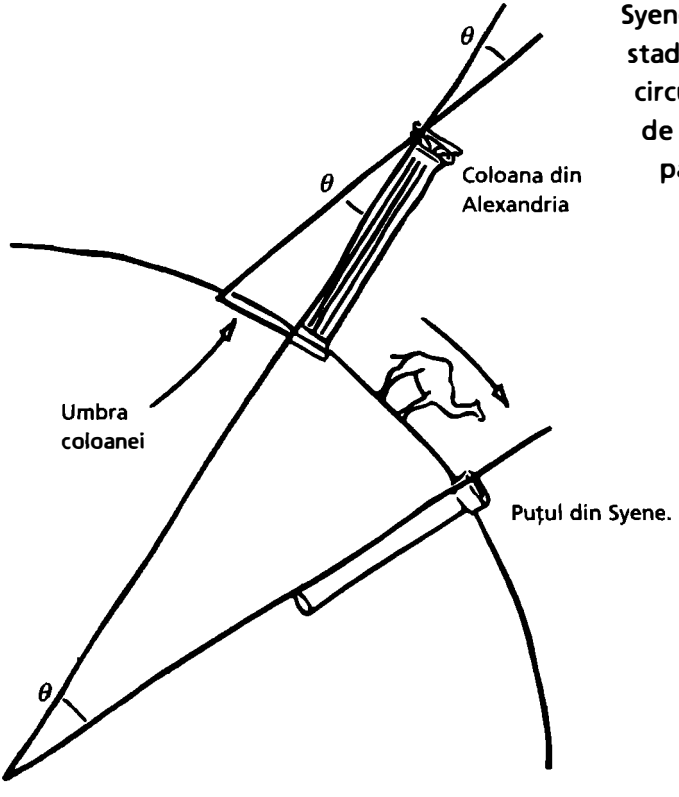


La ce le-a ajutat geometria



Pe la 250 î.Cr. Eratostene din Cyrene a folosit geometria pentru a estima dimensiunea Pământului. El a observat că la amiază, la solstiţiul de vară, Soarele era aproape exact deasupra capului la Syene (în prezent, Aswan), deoarece lumina drept într-un puţ vertical. În aceeaşi zi a anului, umbra unei coloane înalte arăta că poziţia Soarelui la Alexandria era, faţă de direcţia verticală, la un unghi reprezetând a cincizecea parte dintr-un cerc complet (aproximativ 7,2°). Grecii ştiau că Pământul e rotund, iar Alexandria se afla aproape pe direcţia Nord faţă de Syene, astfel încât geometria unei secţiuni circulare prin sferă arăta că distanţa dintre Alexandria şi Syene era a cincizecea parte din circumferinţa Pământului.

Eratostene ştia că o caravană de cămile avea nevoie de 50 de zile pentru a ajunge de la Alexandria la Syene, străbătând 100 de stadii pe zi. Astfel încât distanţa de la Alexandria la Syene este de 5 000 de stadii, ceea ce dă o circumferinţă a Pământului de 250 000 de stadii. Din păcate nu ştim exact care era lungimea unui stadiu, dar ea este estimată la 157 de metri, de unde rezultă o circumferinţă a Pământului de 39 250 km.



Cum a măsurat Eratostene dimensiunea Pământului.

Grecii ştiau să trisecţioneze unghiuri şi să dubleze cubul folosind conicele.

Două idei esenţiale au adus matematicienii greci. Cea mai uşor de intuit a fost înţelegerea sistematică a geometriei. Folosind geometria drept instrument, grecii au aflat forma şi dimensiunea planetei noastre, raporturile ei cu Soarele şi Luna, ba chiar şi mişcările complexe ale restului sistemului solar. Ei au folosit geometria pentru a săpa tuneluri lungi, avansând de la ambele capete şi întâlnindu-se la mijloc, ceea ce reducea timpul de lucru la jumătate. Au construit maşinării gigantice şi puternice, bazându-se pe principii simple precum legea pârghiei, în scopuri atât paşnice, cât şi războinice. Au exploatat geometria în construcţii navale şi în arhitectură, iar temple precum Partenonul ne arată că matematica şi frumosul pot fi îngemănate. Eleganţa siluetei Partenonului se datorează unei mulţimi de trucuri matematice iscusite, utilizate de arhitect pentru a depăşi limitările sistemului vizual uman şi neregularităţile terenului pe care s-a construit.

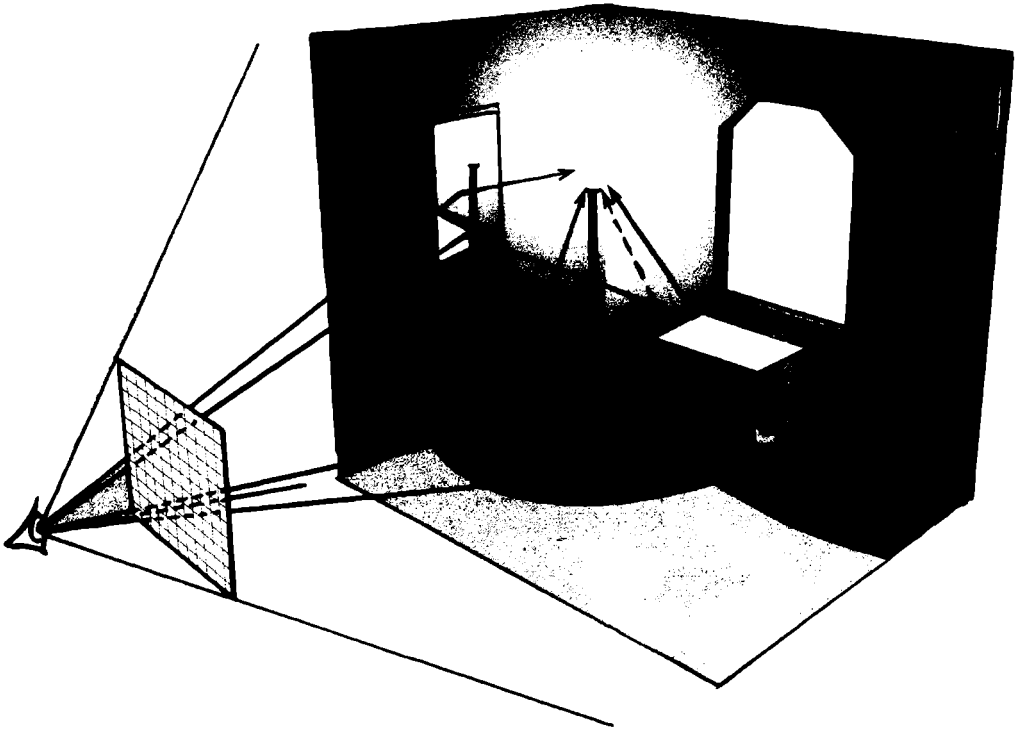
Noul stadion Wembley. Construit folosind principii descoperite în Grecia antică şi dezvoltate de-a lungul secolelor de mai multe culturi.

La ce ne ajută geometria

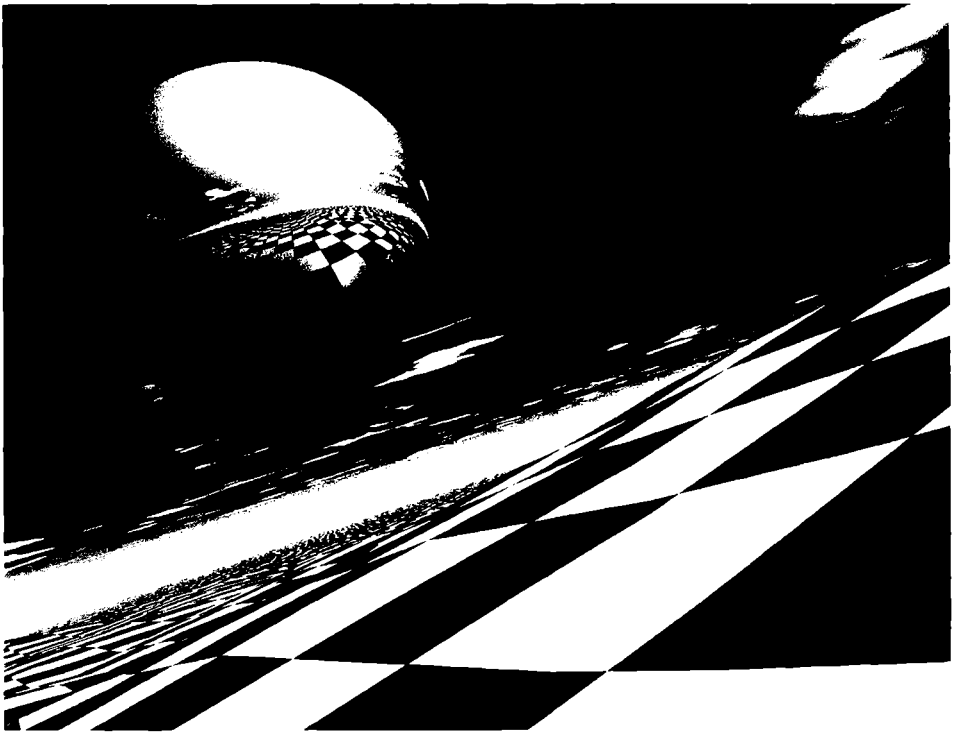
Formula lui Arhimede pentru volumul sferei e valabilă și azi. O aplicație care presupune cunoașterea numărului π cu mare precizie este unitatea standard de masă pentru întreaga știință. Mulți ani, de exemplu, metrul a fost definit drept lungimea unei anumite bare de metal măsurată la o anumită temperatură.

Multe unități de măsură fundamentale sunt definite acum, de pildă, în funcție de timpul în care un atom al unui anumit element vibrează de un număr imens de ori. Dar unele se bazează totuși pe obiecte materiale, cum se întâmplă în cazul masei. Unitatea standard pentru masă e kilogramul. Un kilogram e definit ca masa unei anumite sfere alcătuită din siliciu pur și păstrată la Paris. Această sferă a fost realizată cu foarte mare precizie. Densitatea siliciului a fost de asemenea măsurată foarte exact. Formula lui Arhimede e necesară pentru calculul volumului sferei, care leagă densitatea de masă.

Principiul urmăririi razei

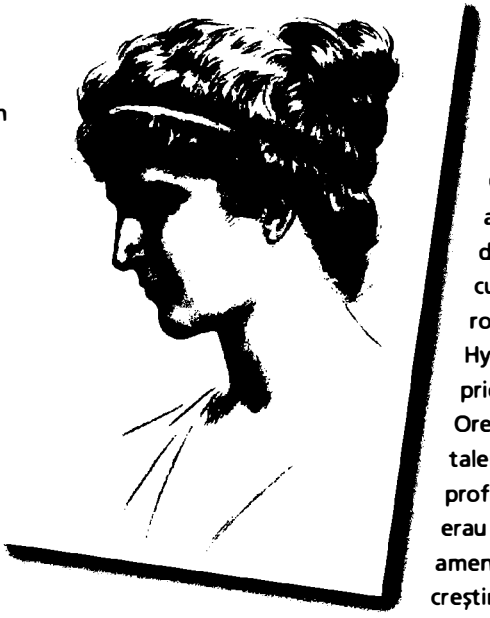


Altă aplicație modernă a geometriei intervine în grafica pe calculator. Filmele folosesc din plin imagini generate pe calculator (CGI), iar adesea aceste imagini includ reflecții – pe o oglindă, pe un pahar de vin sau pe orice obiect pe care cade lumina. Fără asemenea reflecții imaginea nu ar părea reală. O metodă eficientă în acest sens este urmărirea razei. Când privim o scenă dintr-o anumită direcție, ochiul detectează o rază de lumină care a ricoșat pe obiectele din scenă și se întâmplă să intre în ochi din acea direcție. Putem urmări drumul razei în sens invers. Pe orice suprafață reflectantă, raza ricoșează astfel încât raza inițială și cea reflectată să formeze unghiuri egale cu suprafața. Transpunerea acestui fapt geometric în calcul numeric permite calculatorului să urmărească traseul razei în sens invers, oricâte reflecții ar fi necesare, până când ajunge la o suprafață opacă. (Pot exista mai multe reflecții, dacă, de exemplu, paharul de vin se află în fața unei oglinzi.)



Hypatia din Alexandria

370–415 d.Cr.



Hypatia e prima femeie matematician menţionată de istorie. Era fiica lui Theon din Alexandria, el însuşi matematician, şi probabil că a învăţat matematică de la el. Pe la anul 400 a devenit conducătoarea şcolii platoniciene din Alexandria, predând filozofie şi matematică. Mai multe surse istorice afirmă că era o profesoară strălucită. Nu ştim dacă Hypatia a avut vreo contribuţie originală în matematică, dar l-a ajutat pe Theon să scrie un comentariu la *Almagesta* lui Ptolemeu şi e posibil să-l fi ajutat şi la pregătirea unei noi ediţii a *Elementelor*, pe care s-au bazat toate ediţiile ulterioare. A scris comentarii asupra *Aritmeticii* lui Diofant şi *Conicelor* lui Apoloniu.

Printre elevii Hypatiei se numărau câteva figuri importante ale creştinismului aflat în plină expansiune, precum Synesios din Cyrene. S-au păstrat câteva scrisori ale lui către ea în care îi elogiază calităţile. Din păcate, mulţi dintre primii creştini au considerat filozofia şi ştiinţa Hypatiei înrădăcinate în păgânism şi s-au temut de influenţa ei.

În 412, noul patriarh al Alexandriei, Chiril, s-a angajat într-o dispută politică cu prefectul roman Orestes. Hypatia era prietenă bună cu Orestes, iar talentele ei de profesor şi orator erau privite ca o ameninţare de către creştini. A devenit o ţintă pentru tulburările politice şi a fost sfâşiată de gloata dezlănţuită. O sursă dă vina pe o sectă fundamentalistă, călugării Nitrieni, care îl susţineau pe Chiril. Alta dă vina pe o bandă din Alexandria. O a treia sursă susţine că ea făcea parte dintr-o conspiraţie politică şi moartea ei era inevitabilă.

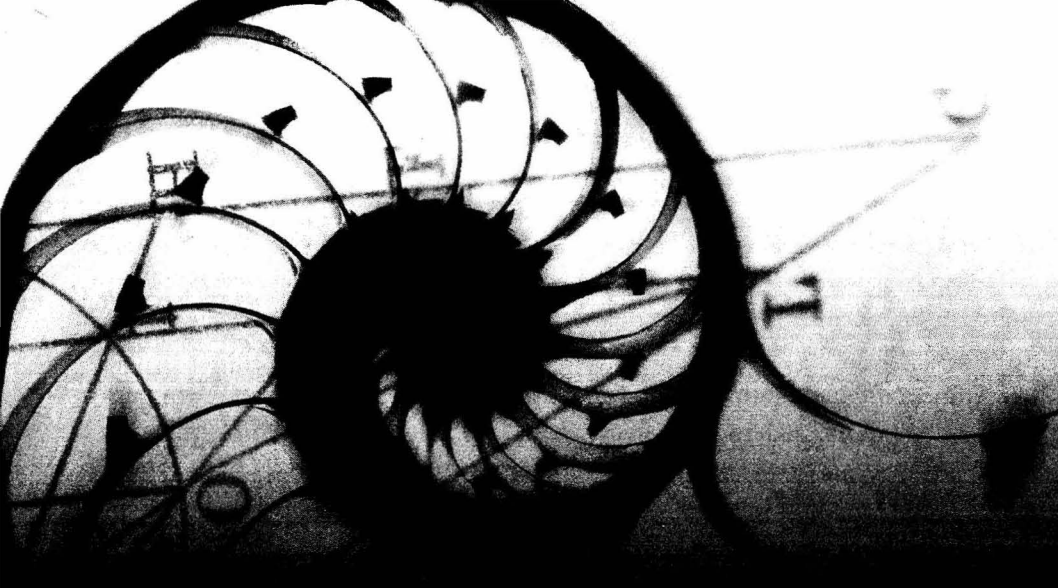
Moartea i-a fost violentă, fiind sfâşiată de mulţime cu obiecte ascuţite (unii spun cochilii de scoici). Corpul ei dezmembrat a fost apoi ars. Această pedeapsă poate fi o dovadă că Hypatia a fost condamnată pentru vrăjitorie – prima vrăjitoare importantă ucisă de creştini –, deoarece pedeapsa pentru vrăjitorie recomandată de Constanţiu al II-ea era „să li se smulgă carnea de pe oase cu cârlige de fier".

A doua contribuție greacă a fost folosirea sistematică a deducției logice pentru a garanta că afirmațiile făcute erau justificate. Argumentația logică provenea din filozofia lor, dar și-a găsit forma cea mai înaltă și mai explicită în geometria lui Euclid și a urmașilor săi. Fără baze logice solide, matematica nu s-ar fi putut dezvolta.

...fiecare stadion de fotbal reprezintă un omagiu adus geometrilor din Grecia antică.

Ambele influențe rămân esențiale în zilele noastre. Ingineria modernă – proiectarea și fabricarea asistate de calculator, de exemplu – se bazează din plin pe principiile geometrice descoperite de greci. Fiecare clădire e proiectată astfel încât să nu se prăbușească sub propria-i greutate; multe sunt proiectate să reziste la cutremure. Fiecare clădire înaltă, fiecare pod suspendat, fiecare stadion de fotbal reprezintă un omagiu adus geometrilor din Grecia antică.

Gândirea rațională, argumentația logică, e de asemenea esențială. Lumea noastră e mult prea complexă, iar pericolele sunt mult prea mari pentru a ne întemeia hotărârile pe ceea ce vrem să credem, și nu pe ce e cazul să credem. Metoda științifică e anume concepută pentru a ne împiedica să luăm drept adevăr ceea ce vrem să fie adevărat – ceea ce pretindem că „știm". În știință, accentul se pune pe încercarea de a demonstra că ceea ce crezi cu tărie este de fapt greșit. Ideile care rezistă încercărilor riguroase de a le dezminți e mai probabil să fie corecte.



3

De unde provin simbolurile noastre numerice

Suntem atât de obișnuiți cu sistemul actual al numerelor, cu folosirea celor zece cifre zecimale 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi 9 (în țările occidentale), încât poate părea şocant să aflăm că există modalități total diferite de a scrie numerele. Chiar şi în zilele noastre, mai multe culturi – arabă, chineză, coreeană – folosesc simboluri diferite pentru cele zece cifre, deşi toate combină aceste simboluri spre a forma numere mai mari prin aceeaşi metodă „poziţională" (sute, zeci, unități). Dar diferențele de scriere pot fi mult mai mari. Numărul 10 nu are nimic deosebit. Se întâmplă că e numărul degetelor de la mâini sau de la picioare, care sunt ideale pentru a număra, dar, dacă am fi avut şapte degete sau douăsprezece, sisteme similare ar fi funcționat la fel de bine, poate chiar mai bine în unele cazuri.

Cifrele romane

Majoritatea occidentalilor cunosc cel puțin un sistem alternativ, cifrele romane, în care – de pildă – anul 2012 se scrie MMXII. Mulți dintre noi suntem conştienți, cel puțin dacă ni se atrage atenția, că folosim două metode diferite pentru a scrie numere care nu sunt întregi – fracții precum $^3/_4$ şi zecimale precum 0,75. Dar mai există şi altă modalitate, folosită la calculatoare, pentru scrierea numerelor foarte mari sau foarte mici – cum ar fi 5×10^9 pentru cinci miliarde (adesea întâlnit ca 5E9 pe ecranele calculatoarelor) sau 5×10^{-6} pentru cinci milionimi.

Aceste sisteme simbolice s-au dezvoltat de-a lungul a mii de ani, iar multe alte variante au apărut în cadrul altor culturi. Am întâlnit deja sistemul babilonian sexagesimal (care i-ar fi părut firesc unei ființe cu 60 de degete) şi simbolurile numerice egiptene, mai simple şi mai limitate, cu felul straniu de a trata fracțiile. Ulterior, civilizația maya din America Centrală a folosit numere în baza 20. Abia recent omenirea a adoptat metodele curente de scriere a numerelor, iar folosirea lor s-a încetățenit printr-un amestec de tradiție şi convenție. Matematica se ocupă de concepte, nu de simboluri – dar alegerea inspirată a simbolurilor poate fi extrem de utilă.

Cifrele greceşti

Începem istoria simbolurilor numerice cu grecii. Geometria greacă a reprezentat un mare progres faţă de geometria babiloniană, dar aritmetica greacă – atât cât putem şti pe baza surselor rămase – dimpotrivă. Grecii au făcut un pas înapoi; ei n-au folosit notaţia poziţională. În schimb, au folosit simboluri speciale pentru multiplii lui 10 sau 100, astfel încât, de exemplu, simbolul pentru 50 nu avea nici o legătură cu acelea pentru 5 sau 500.

Cea mai veche mărturie privind cifrele greceşti datează de pe la 1100 î.Cr. Pe la 600 î.Cr. simbolurile s-au schimbat, iar pe la 450 î.Cr. s-au schimbat din nou, prin adoptarea sistemului atic, care seamănă cu cel roman. Sistemul atic folosea ||, ||| şi |||| pentru numerele 1, 2, 3 şi 4. Pentru 5 se folosea litera majusculă „pi" (Π), probabil fiindcă e prima literă din *penta*. În mod asemănător, 10 era reprezentat prin Δ, prima litera din *deka*; 100 se scria ca H, prima literă din *hekaton*, 1000 era scris Ξ, prima litera din *chilioi*; 10 000 se scria ca M, prima literă din *myrioi*. Ulterior, Π s-a schimbat cu Γ. Astfel, numarul 2 178, de exemplu, se scria

ΞΞΗΔΔΔΔΔΔΔΓΙΙΙ

Chiar dacă pitagoreicii au făcut din numere baza filozofiei lor, nu se ştie cum le scriau. Interesul lor pentru numerele pătratice şi triunghiulare sugerează că le puteau reprezenta prin modele de puncte. În perioada clasică, 600–300 î.Cr., sistemul grecesc s-a schimbat iarăşi, iar cele 27 de litere ale alfabetului lor au fost folosite pentru a desemna numerele de la 1 la 900, astfel:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ

Acestea sunt literele grecești minuscule, completate cu trei litere suplimentare, provenind din alfabetul fenician: ϛ (stigma), ϙ (koppa), ϡ (sampi).

Folosirea literelor pentru reprezentarea numerelor putea provoca ambiguitate, astfel că s-a adăugat o linie orizontală deasupra simbolurilor numerice. Pentru numerele mai mari de 999, valoarea unui simbol putea fi înmulțită cu 1 000 prin plasarea unei liniuțe înaintea ei.

Diferitele sisteme grecești erau acceptabile pentru înregistrarea rezultatului calculelor, dar nu și pentru efectuarea calculelor în sine. (Să ne închipuim că încercăm să înmulțim σ μ γ cu ω λ δ, bunăoară.) Calculele în sine erau probabil efectuate cu un abac, reprezentat poate doar de niște pietricele pe nisip, mai ales la început.

Grecii reprezentau fracțiile în mai multe moduri. Unul era prin scrierea numărătorului, urmat de un apostrof (') și de numitor, urmat de un dublu apostrof ("). Adesea numitorul era scris de două ori. Astfel, 21/47 se scria:

κ α' μ ζ" μ ζ"

unde κ α este 21, iar μ ζ este 47. Ei foloseau de asemenea fracțiile de tip egiptean și exista un simbol special pentru ½. Unii astronomi greci, între care Ptolemeu, foloseau pentru mai multă precizie sistemul sexagesimal babilonian, dar păstrau simbolurile grecești pentru cifrele componente. Toate acestea difereau mult de sistemul actual. De fapt, era o harababură.

Simboluri numerice indiene

Cele zece simboluri folosite acum pentru reprezentarea cifrelor zecimale sunt numite adesea numerale *indo-arabe*, deoarece provin din India și au fost preluate și dezvoltate de arabi.

Cele mai vechi cifre indiene semănau cu cele din sistemul egiptean. De exemplu, numeralele Khasrosthi, folosite de la 400 î.Cr. până în 100 d.Cr., reprezintă numerele de la 1 la 8 astfel:

I II III X IX IIX IIIX XX

cu un simbol special pentru 10. Primele forme care stau la originea sistemului modern au apărut pe la 300 î.Cr. prin numeralele Brahmi. Inscripțiile budiste din epocă includ precursori ai simbolurilor indiene ulterioare pentru 1, 4 și 6. Sistemul Brahmi folosea însă simboluri diferite pentru multiplii lui 10 sau ai lui 100, astfel încât era asemănător sistemului grecesc, cu deosebirea că folosea simboluri speciale în loc de litere ale alfabetului. Sistemul Brahmi nu era unul

poziţional. Mărturii ale sistemului Brahmi integral datează de pe la 100 d.Cr. Inscripţii din peşteri şi de pe monede arată că a fost folosit în continuare până în secolul al IV-lea.

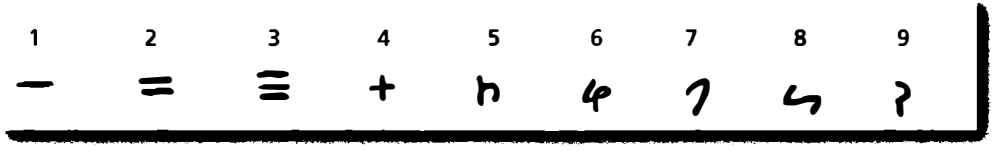
Între secolele IV şi VI, imperiul Gupta a dominat o mare parte din India, iar sistemul Brahmi s-a transformat în sistemul Gupta. Apoi au apărut cifrele Nagari. Ideea era aceeaşi, dar simbolurile difereau.

Indienii au inventat pesemne notaţia poziţională prin secolul I, dar prima mărturie datează din 594. E vorba de un document juridic din anul 346 al calendarului Chedii, însă unii specialişti cred că datarea ar fi falsă. În general, se acceptă totuşi faptul că notarea poziţională era folosită în India începând de pe la 400.

Exista însă o problemă legată de folosirea doar a simbolurilor 1–9: notaţia e ambiguă. De exemplu, ce înseamnă 25? Poate fi (cu notaţia noastră) 25 sau 205 sau 2005 sau 250 etc. În notaţia poziţională, în care semnificaţia unui simbol depinde de locul unde el se află, e importantă precizarea neambiguă a poziţiei. Acum noi o facem folosind un al zecelea simbol, zero (0). Pentru civilizaţiile străvechi însă a trebuit să treacă mult timp până să recunoască problema şi s-o rezolve în felul acesta. Un motiv era de ordin filozofic: cum putea fi 0 un număr, dacă numerele reprezintă o cantitate de lucruri? E nimicul o cantitate? Un alt motiv era de ordin practic: de regulă reieşea din context dacă 25 însemna 25 sau 250 sau altceva.

Cândva înainte de 400 î.Cr. – data exactă nu e cunoscută – babilonienii au introdus un simbol special pentru a indica absenţa unei poziţii în notaţia lor numerică. Astfel, scribii nu mai trebuiau să fie atenţi cât spaţiu liber să lase, iar numărul putea fi identificat chiar dacă era scris la repezeală. Această invenţie a fost uitată, sau nu s-a transmis altor culturi, iar apoi a fost redescoperită de indieni. Manuscrisul Bakhshali, a cărui datare controversată se situează în intervalul 200 d.Cr. şi 1100, foloseşte un punct îngroşat •. Textul jainist *Lokavibhaaga* din 458 d.Cr. foloseşte noţiunea de zero, dar nu şi un simbol corespunzător. Un sistem poziţional fără cifra zero a fost inventat de Aryabhata pe la 500 d.Cr. Matematicienii indieni ulteriori aveau nume pentru zero, dar nu foloseau vreun simbol. Prima folosire indiscutabilă a lui zero în notaţia poziţională apare pe o tăbliţă de piatră din Gwalior, datată 876 d.Cr.

Numeralele Brahmi



Brahmagupta, Mahavira și Bhaskara

Principalii matematicieni indieni au fost Aryabhata (născut în 476 d.Cr.), Brahmagupta (născut în 598 d.Cr.), Mahavira (secolul IX) și Bhaskara (născut în 1114). De fapt, ei ar trebui numiți astronomi, deoarece matematica era considerată pe atunci o tehnică astronomică. Matematica, atâta câtă exista, apărea în texte de astronomie, nu era privită ca un domeniu de sine stătător. Aryabhata ne spune că a scris cartea sa *Aryabhatiya* la vârsta de 23 ani. Deși scurtă, secțiunea de matematică a cărții e consistentă: un sistem alfabetic al numeralelor, reguli de aritmetică, metode de rezolvare a ecuațiilor liniare sau pătratice, trigonometrie (inclusiv funcția sinus și „sinusul invers" $1 - \cos\theta$). Exista de asemenea o excelentă aproximare pentru π: 3,1416.

Brahmagupta este autorul a două cărți: *Brahma Sputa Siddhanta* și *Khanda Khadyaka*. Prima e cea mai importantă; este un text de astronomie cu mai multe secțiuni de matematică, cu aritmetică și echivalentul verbal al algebrei elementare. A doua carte include o metodă remarcabilă pentru tabelele de interpolare a funcției sinus – aflarea sinusului unui unghi folosind sinusurile unui unghi mai mare și unuia mai mic.

Lilavati nu s-a mai putut căsători niciodată. Ca s-o consoleze, Bhaskara a scris o carte de matematică pentru ea.

Mahavira era jainist și a introdus multă matematică jainistă în cartea sa *Ganita Sara Samgraha*. Aceasta include mare parte din conținutul cărților lui Aryabhata și Brahmagupta, dar merge mult mai departe și e mai complexă. Ea cuprinde fracții, permutări și combinații, soluția ecuațiilor pătratice, triunghiurile lui Pitagora și o încercare de a afla aria și perimetrul elipsei.

Bhaskara (numit „dascălul") a scris trei lucrări importante: *Lilavati, Bijaganita* și *Siddhanta Siromani*. Conform mărturiei lui Fyzi, poetul de curte al împăratului mogul Akbar, Lilavati era numele fiicei lui Bhaskara. El a cercetat horoscopul fetei, stabilind perioada cea mai propice pentru nunta ei. Și-a pus în scenă previziunea așezând într-un vas cu apă o cupă în care era un orificiu, astfel încât aceasta să se scufunde la sosirea momentului de bun augur. Lilavati însă s-a aplecat peste vas, iar o perlă din rochia ei a căzut în cupă, astupând orificiul. Cupa nu s-a scufundat, iar astfel Lilavati nu s-a mai putut căsători niciodată. Ca s-o consoleze, Bhaskara a scris o carte de matematică pentru ea. Legenda nu ne spune ce a părere a avut Lilavati.

Vechiul observator Jantar Mantar de lângă Jaipur.
Este evident astăzi că proiectantul a fost un matematician desăvârşit.

Lilavati conţine idei subtile de aritmetică, inclusiv metoda eliminării lui 9, în care numerele sunt înlocuite prin suma cifrelor lor pentru verificarea calculelor. Conţine reguli similare pentru divizibilitatea cu 3, 5, 7 şi 11. E lămurit rolul lui zero ca număr de sine stătător. *Bijaganita* se ocupă de rezolvarea ecuaţiilor. *Siddhanta Siromani* se ocupă de trigonometrie: tabele pentru sinus şi diverse relaţii trigonometrice. Renumele lui Bhaskara a fost atât de mare, încât lucrările lui continuau să fie copiate chiar şi pe la 1800.

Sistemul indian

Sistemul indian a început să se răspândească în lumea arabă încă înainte să se fi dezvoltat complet în ţara de origine. Învăţatul Severus Sebokht vorbeşte despre folosirea sa în Siria în 662: „N-am să pomenesc nimic despre ştiinţa indienilor [...] despre descoperirile lor subtile din astronomie [...] şi despre preţioasele lor metode de calcul [...]. Vreau numai să spun că acest calcul e făcut cu ajutorul a nouă semne."

La ce le-a ajutat aritmetica

Cel mai vechi text chinezesc de matematică ajuns până la noi este *Chiu Chang*, datând de pe la 100 d.Cr. O problemă tipică e următoarea: Doi piculi și jumătate de orez pot fi cumpărați cu 3/7 taeli de argint. Câți piculi de orez se pot cumpăra cu 9 taeli? Soluția propusă folosește metoda numită de matematicienii medievali „regula de trei simplă". Cu notația actuală, fie x cantitatea necunoscută. Atunci

$$\frac{x}{9} = \frac{5/2}{3/7}$$

astfel încât x = 52 ½ piculi. Un picul e aproximativ 65 kilograme.

În 776 un călător din India a apărut la curtea califului și și-a demonstrat măiestria în metoda de calcul „siddhanta", precum și în trigonometrie și astronomie. Referința pentru metodele de calcul pare să fi fost *Brahma Sphuta Siddhanta* lui Brahmagupta, scrisă în 628, dar oricare va fi fost cartea, ea a fost tradusă imediat în arabă.

Inițial cifrele indiene erau folosite mai ales de învățați; metodele mai vechi au fost folosite în continuare de negustori și în viața de zi cu zi, până pe la 1000. Dar cartea lui Al-Khwarizmi *Despre calculul cu cifre indiene* (*Ketab fi Isti`mal al-Adad al-Hindi*) din 830 a făcut cunoscut faptul că toate calculele numerice se puteau efectua folosind numai zece cifre.

Epoca întunecată?

În timp ce Arabia și India făceau mari progrese în matematică și știință, Europa, prin comparație, stagna, deși Evul Mediu nu a fost tocmai „Epoca întunecată", așa cum se spune îndeobște. Ceva progrese s-au făcut, dar ele au fost lente și nu spectaculoase. Ritmul schimbării s-a accelerat când vestea descoperirilor din Orient a ajuns în Europa. Italia se afla mai aproape de lumea arabă decât majoritatea celorlalte țări ale continentului, așa încât, inevitabil, descoperirile matematicii arabe au intrat în Europa prin Italia. Veneția, Genova și Pisa erau centre comerciale importante, iar negustorii navigau din aceste porturi către nordul Africii și răsăritul Mediteranei. Ei schimbau lână și lemn din Europa pentru mătase și mirodenii.

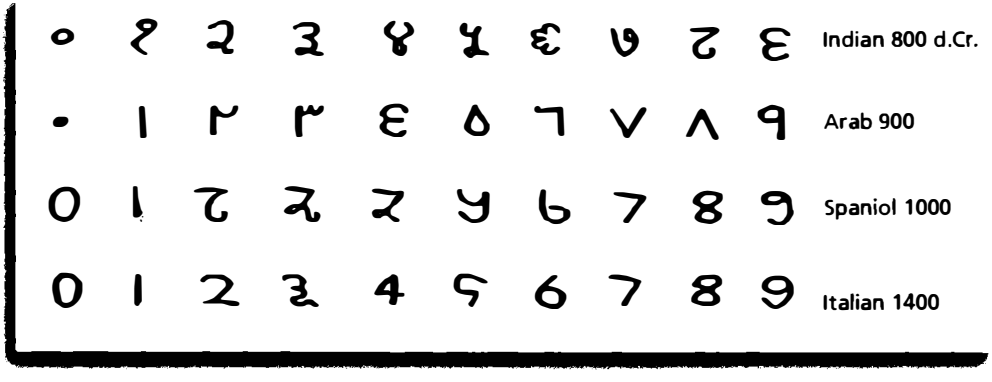
Pe lângă schimbul propriu-zis de bunuri, exista şi, metaforic vorbind, un schimb de idei. Descoperirile arabe în ştiinţă şi matematică au pătruns pe căile comerciale, adesea din gură în gură. Datorită comerţului Europa devenise prosperă, trocul a lăsat locul banilor, iar astfel contabilitatea şi plata impozitelor au devenit mai complexe. Instrumentul echivalent calculatorului de buzunar era abacul, un dispozitiv cu bile înşirate pe sârmă care reprezentau numere. Aceste numere trebuiau totuşi scrise pe hârtie, în scopuri juridice şi contabile. Astfel, negustorii aveau nevoie de un sistem eficient de notare a numerelor şi de metode de calcul rapide şi precise.

O personalitate remarcabilă a fost Leonardo di Pisa, cunoscut ca Fibonacci, a cărui carte *Liber abbaci* a fost publicată în 1202. (Cuvântul italienesc „abbaco" înseamnă în genere „calcul" şi nu implică folosirea abacului, termen latinesc.) Prin această carte Leonardo a introdus în Europa simbolurile numerice indo-arabe.

În *Liber abbaci* se află şi un alt element de notaţie folosit în prezent: linia orizontală pentru fracţii, cum ar fi $\frac{3}{4}$ pentru „trei sferturi". Indienii foloseau o notaţie similară, dar fără linie, care pare să fi fost introdusă de arabi. Fibonacci a folosit-o din plin, dar într-un fel oarecum diferit de cel actual. De exemplu, folosea aceeaşi linie pentru mai multe fracţii.

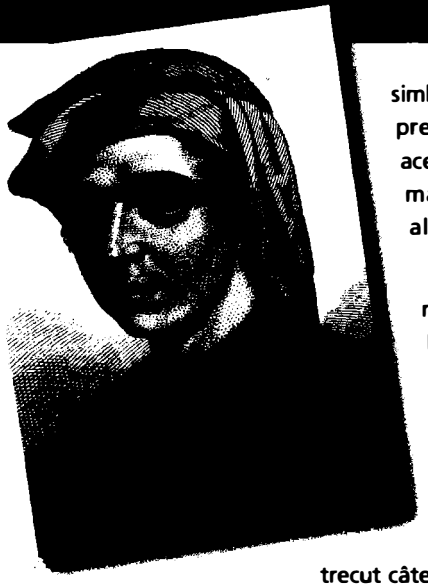
Deoarece fracţiile sunt foarte importante în povestea noastră, merită să spunem câteva cuvinte despre notaţie. Într-o fracţie cum ar fi $\frac{3}{4}$, cifra 4 de dedesubt ne spune să împărţim întregul în patru părţi egale, iar cifra 3 de deasupra ne spune să luăm trei dintre acestea. Într-o exprimare formală, 4 e *numitorul*, iar 3 *numărătorul*. Din motive tipografice, fracţiile sunt scrise adesea pe un singur rând sub forma 3/4 sau uneori chiar sub forma de compromis ¾. Linia orizontală devine o linie diagonală.

Evoluţia simbolurilor numerice occidentale



Leonardo di Pisa

1170–1250



Leonardo s-a născut în Italia, dar a crescut în Africa de Nord, unde tatăl său Guglielmo lucra ca diplomat reprezentând negustorii din Bugia (în Algeria de azi). El şi-a însoţit tatăl în numeroasele sale călătorii, cunoscând astfel sistemul arab de notare a numerelor şi i-a înţeles importanţa. În cartea sa *Liber abbaci* din 1202, spune: „Atunci când tatăl meu, care fusese numit notar public din partea ţării sale la vama din Bugia pentru negustorii pisani care veneau acolo, şi-a preluat postul, m-a chemat la el, iar eu copil fiind şi având ochi pentru lucrurile practice şi profit, tata a vrut să rămân acolo şi să învăţ la şcoala de contabilitate. Când am fost iniţiat în arta indiană a celor nouă simboluri, minunat predată, deprinderea acestei arte m-a bucurat mai mult decât orice altceva."

Cartea prezenta notaţia indo-arabă în Europa, alcătuind un text de aritmetică inteligibil, conţinând părţi ample privind comerţul şi schimburile valutare. Deşi au trecut câteva secole până ca notaţia indo-arabă să înlocuiască abacul tradiţional, avantajele unui sistem de calcul bazat pe scris au devenit repede evidente.

Leonardo e mai cunoscut după porecla sa „Fibonacci", care înseamnă „fiul lui Bonaccio", dar aceasta nu apare înainte de secolul XVIII şi a fost probabil născocită de Guglielmo Libri.

Notaţia fracţională e însă rareori folosită în practică. De regulă folosim zecimale – îl scriem, de exemplu, pe π sub forma 3,14159, ceea ce nu e exact, dar, pentru majoritatea calculelor, e suficient. Vom face un salt în istorie ca să ajungem la zecimale, dar noi urmărim şirul ideilor, nu cronologia. Ajungem astfel în 1585, când Wilhelm de Orania l-a numit pe olandezul Simon Stevin profesor particular al fiului său, Mauriciu de Nassau.

Pe baza acestei recunoaşteri, Stevin a făcut carieră, devenind inspector al digurilor, intendent general al armatei şi, în cele din urmă, ministru de finanţe. A înţeles repede că e nevoie de metode contabile precise şi a studiat lucrările aritmeticienilor italieni din Renaştere şi notaţia indo-arabă introdusă în Europa de Leonardo di Pisa. I s-au părut greoaie calculele cu fracţii şi ar fi preferat precizia şi claritatea sexagesimalelor babiloniene, dacă n-ar fi fost folosită

baza 60. A încercat să găsească un sistem care să combine avantajele celor două şi a inventat analogul în baza 10 al sistemului babilonian: zecimalele.

Şi-a publicat noul sistem de notare, arătând că fusese testat, iar oamenii cu spirit practic îl găsiseră cât se poate de eficient. În plus, a subliniat utilitatca lui ca instrument în afaceri: „Toate calculele întâlnite în afaceri se pot efectua doar cu numere întregi, fără ajutorul fracţiilor."

Notaţia lui nu includea şi virgula zecimală, dar a condus direct la notaţia zecimală actuală. Numărul 5,7731, de pildă, Stevin îl scria: 5⓪7①7②3③1④. Semnul ⓪ indica un număr întreg, ① o zecime, ② o sutime etc. Pe măsură ce oamenii s-au obişnuit cu acest sistem, ei au eliminat ①, ② etc., păstrând numai ⓪ – care s-a contractat şi s-a simplificat devenind virgula zecimală.

Numerele negative

Matematicienii numesc numerele 1, 2, 3, ... *numere naturale*. Dacă includem şi numerele negative, obţinem numerele întregi. *Numerele raţionale* (sau „raţionalele") sunt fracţiile pozitive şi negative, *numerele reale* (sau „realele") sunt zecimalele pozitive şi negative, prelungindu-se la nesfârşit dacă e necesar.

Cum au apărut numerele negative în istorie?

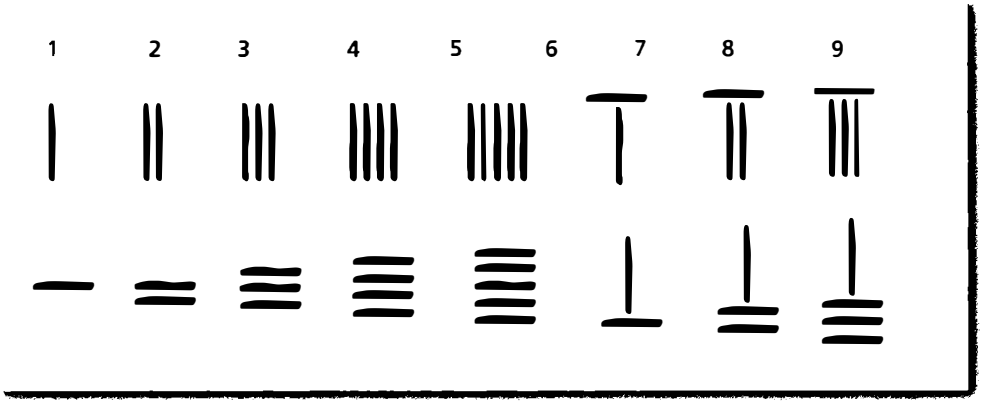
Pe la începutul mileniului I, chinezii foloseau un sistem de „beţişoare pentru socotit" în loc de abac. Ei grupau beţişoarele în anumite configuraţii pentru a reprezenta numerele.

Pe la începutul mileniului I, chinezii foloseau un sistem de „beţişoare pentru socotit" în loc de abac.

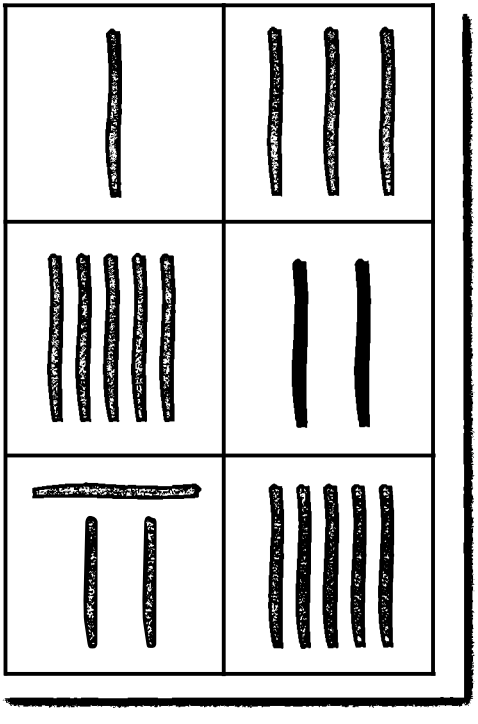
În rândul de sus al imaginii de pe pagina alăturată se află beţişoare *heng*, care reprezintă unităţi, sute, zeci de mii etc., în funcţie de poziţia lor într-un şir de asemenea semne. În rândul de jos sunt beţişoare *tsung*, care reprezintă zeci, mii etc. Aşadar, cele două tipuri alternau. Calculele se efectuau manevrând beşişoarele în mod sistematic.

Pentru a rezolva un sistem de ecuaţii liniare, socotitorii chinezi aranjau beţişoarele pe o masă. Ei foloseau beţişoare roşii pentru termenii care trebuiau adunaţi şi beţişoare negre pentru termenii care trebuiau scăzuţi. Astfel, pentru a rezolva ecuaţii pe care noi le-am scrie ca

$$3x - 2y = 4$$
$$x + 5y = 7$$



Vechi bețișoare de calcul chinezești



Aranjarea ecuațiilor în stil chinezesc. Bețișoarele întunecate sunt roșii

ei aranjau cele două ecuații ca două coloane ale unui tabel: una cu numerele 3 (roşu), 2 (negru), 4 (roşu), iar cealaltă 1 (roşu), 5 (roşu), 7 (roşu).

Notația roşu/negru nu se referea de fapt la numere negative, ci doar la operația de scădere. Totuşi, ea a pregătit terenul pentru noțiunea de număr negativ, *cheng fu shu*. Astfel, numărul negativ era reprezentat folosind acelaşi

aranjament al beţişoarelor ca pentru numărul pozitiv corespunzător, dar cu un beţişor aşezat orizontal deasupra.

Pentru Diofant, toate numerele trebuiau să fie pozitive şi el excludea soluţiile negative ale ecuaţiilor. Matematicienii indieni găseau numerele negative utile pentru a reprezenta datoriile în calculele financiare – a datora cuiva bani era mai rău, financiar vorbind, decât a nu avea bani deloc, aşa încât o datorie trebuie să fie mai mică decât zero. Dacă ai trei lire şi cheltuieşti două, rămâi cu $3 - 2 = 1$. La fel, dacă ai o datorie de 2 lire şi primeşti 3, câştigul net este $-2 + 3 = 1$. Bhaskara a observat că o anumită problemă avea două soluţii, 50 şi -5, dar era nemulţumit de cea de-a doua, spunând că „trebuie ignorată; oamenii nu sunt de acord cu soluţiile negative" .

Cu toate aceste neajunsuri, treptat numerele negative au fost acceptate. Interpretarea lor în calculele reale necesita atenţie. Uneori nu aveau sens, uneori însemnau datorii, alteori reprezentau o mişcare în jos, şi nu în sus. Dar, indiferent de interpretare, aritmetica lor funcţiona perfect şi erau atât de utile în calcule, încât ar fi fost o prostie să nu le foloseşti.

Aritmetica îşi continuă cariera

Sistemul nostru numeric ne e atât de familiar, încât pare să fie singurul posibil, sau cel puţin singurul raţional. De fapt, el a evoluat, cu greu şi cu destule fundături, timp de mii de ani. Există multe alternative; unele au fost folosite de culturi mai vechi, cum e cultura maya. Notaţii diferite pentru numerele 0–9 se folosesc şi acum în anumite ţări. Calculatoarele folosesc numere binare, nu zecimale: programatorii au grijă să le transforme în numere zecimale înainte de a apărea pe ecran sau de a fi imprimate.

Din moment ce calculatoarele sunt acum omniprezente, mai are rost să predăm aritmetică? Da, din mai multe motive. Cineva trebuie să poată proiecta şi construi calculatoare şi să se asigure că funcţionează corect; aceasta presupune *înţelegerea* aritmeticii – de ce şi cum funcţionează ea, nu doar cum să calculezi. Iar dacă talentele tale aritmetice se reduc la citirea unui ecran de calculator, probabil că n-ai să observi când factura de la magazin e greşită. Fără stăpânirea operaţiilor aritmetice elementare, întreaga matematică îţi va rămâne inaccesibilă.

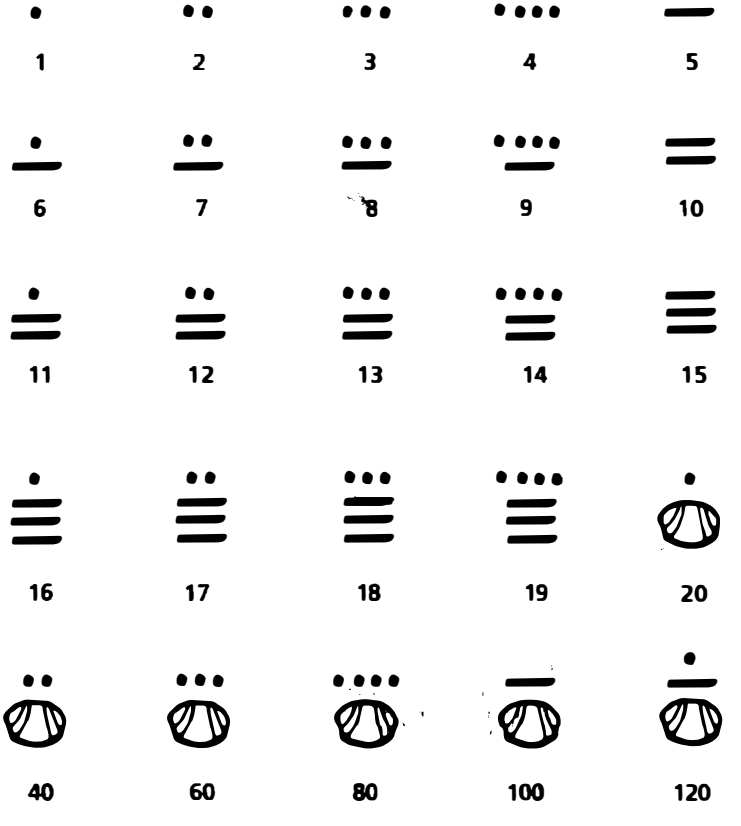
...civilizaţia modernă s-ar prăbuşi rapid dacă am înceta să predăm aritmetică...

S-ar putea să nu-ţi pese de asta, dar civilizaţia modernă s-ar prăbuşi rapid dacă am înceta să predăm aritmetică, deoarece viitorii ingineri şi oameni de

CIFRELE MAYA

Un sistem remarcabil de notare a numerelor, folosind baza 20 în locul bazei 10, a fost creat de mayaşi, care au trăit în America Centrală pe la anul 1000. În sistemul în baza 20, semnele echivalente cu numărul nostru 347 ar fi $3 \times 400 + 4 \times 20 + 7 \times 1$ (fiindcă $20 \times 20 = 400$), ceea ce ar da 1287 în notaţia noastră. Simbolurile propriu-zise sunt înfăţişate aici.

Civilizaţiile vechi care foloseau baza 10 au procedat astfel deoarece oamenii au zece degete. S-a emis ipoteza că mayaşii numărau probabil şi cu degetele de la picioare, de aceea au ales baza 20.



La ce ne ajută aritmetica

Folosim aritmetica în viața de zi cu zi, în comerț și în știință. Până la apariția calculatoarelor electronice și a computerelor, fie efectuam calculele de mână, folosind creionul și hârtia, fie apelam la instrumente ajutătoare, precum abacul sau tabelele de calcul. Acum majoritatea operațiilor aritmetice se desfășoară electronic în culise – casele de marcat din supermarketuri arată casierilor cât rest trebuie să dea și pot opera direct în contul bancar, fără intervenția vreunui contabil. Cantitatea de aritmetică „consumată" de un om într-o singură zi e imensă.

În calculatoare, operațiile aritmetice nu se efectuează în sistemul zecimal. Calculatoarele folosesc baza 2, sau sistemul binar, nu baza 10. În loc de unități, zeci, sute, mii etc., calculatoarele folosesc 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 etc. – puterile lui doi, fiecare termen fiind dublul precedentului. (De aceea dimensiunea cardului de memorie al camerei voastre digitale are valori ciudate, cum ar 256 megabiți.) În calculator, numărul 100 e descompus în 64 + 32 + 4 și memorat sub forma 1100100.

știință nu pot fi depistați de la vârsta de cinci ani. Și nici măcar viitorii bancheri și contabili.

Desigur, odată ce deții cunoștințele aritmetice elementare, folosind calculatorul economisești timp și energie. Dar, după cum nu poți învăța să mergi folosind mereu o cârjă, nici nu poți înțelege corect numerele bazându-te doar pe calculator.

4

X nimerește ținta

Folosirea simbolurilor în matematică depăşeşte cu mult apariţia lor în notarea numerelor, aşa cum se vede limpede dacă îţi arunci ochii pe un text de matematică. Primul pas important spre raţionamentul simbolic – nu doar simpla reprezentare simbolică – a apărut în contextul rezolvării de probleme. Numeroase texte antice, încă din epoca babiloniană, prezintă cititorului informaţii despre o anumită cantitate necunoscută, iar apoi îi cere să-i determine valoarea. O formulare tipică din tăbliţele babiloniene sună astfel: „Am găsit o piatră, dar n-am cântărit-o." După prezentarea unor informaţii suplimentare – „când am adăugat o a doua piatră, a cărei greutate era jumătate din greutatea primeia, greutatea totală era de 15 *gin*" –, elevului i se cere să calculeze greutatea primei pietre.

Algebra

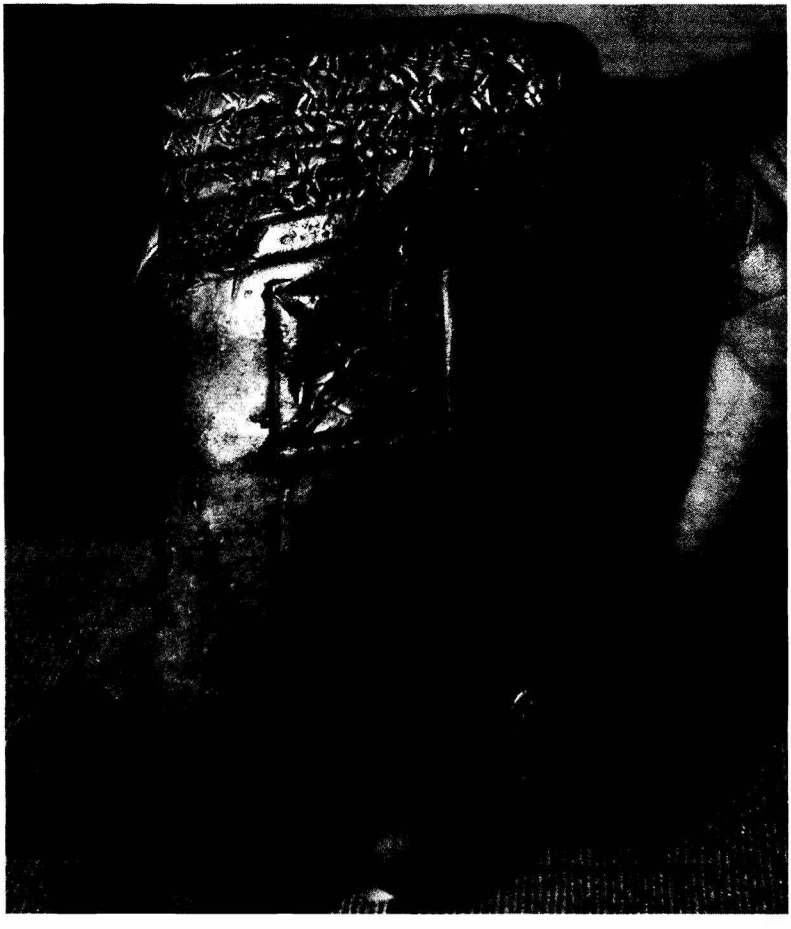
Asemenea probleme au condus în cele din urmă la ceea ce numim astăzi algebră, în care numerele sunt reprezentate prin litere. Cantitatea necunoscută e de regulă notată cu litera x, condiţiile pe care trebuie să le satisfacă x sunt prezentate prin diferite formule matematice, iar elevul învaţă metodele standard de a extrage valoarea lui x din acele formule. De pildă, problema babiloniană de mai sus poate fi scrisă ca $x + \frac{1}{2} x = 15$, şi trebuie să învăţăm cum să deducem că $x = 10$.

Cum a apărut algebra?

La nivel şcolar, algebra e o ramură a matematicii în care numerele necunoscute sunt reprezentate prin litere, operaţiile aritmetice sunt reprezentate prin simboluri, iar principala sarcină este de a deduce valoarea cantităţilor necunoscute din ecuaţii.

O problemă tipică de algebră şcolară este aflarea unui număr x necunoscut, fiind dată ecuaţia $x^2 + 2x = 120$. Această ecuaţie pătratică are o soluţie pozitivă, $x = 10$. Astfel, $x^2 + 2x = 10^2 + 2 \times 10 = 100 + 20 = 120$.

Ea are şi o soluţie negativă, $x = -12$. Astfel, $x^2 + 2x = (-12)^2 + 2 \times (-12) = 144 - 24 = 120$. Anticii ar fi acceptat soluţia pozitivă, dar nu şi pe cea negativă. Astăzi le acceptăm pe amândouă, deoarece în multe probleme numerele negative au sens şi corespund unor situaţii concrete, precum şi pentru că matematica devine mai simplă dacă acceptăm numerele negative.



Tăbliță babiloniană conținând o problemă de algebră și geometrie

În matematica superioară, folosirea simbolurilor pentru a reprezenta numerele e un aspect minor. Algebra se ocupă de proprietățile expresiilor simbolice ca atare; se ocupă de structură și formă, nu doar de numere. Această perspectivă mai largă asupra algebrei a apărut atunci când matematicienii au început să-și pună întrebări generale despre algebra de nivel școlar. În loc să încerce să rezolve anumite ecuații, ei au cercetat structura profundă a însuși procesului de rezolvare.

Cum a apărut algebra? La început au fost probleme și metode. Abia mai târziu a fost inventată notația simbolică, pe care acum o considerăm esența domeniului. Au existat mai multe sisteme de notație, dar în cele din urmă unul dintre ele și-a eliminat toți rivalii. Numele „algebră" a apărut în toiul acestui proces și are origine arabă. („Al", de la începutul cuvântului, e articolul hotărât în arabă.)

Ecuațiile

Ceea ce numim acum rezolvarea ecuațiilor, prin care o cantitate necunoscută trebuie aflată din informații potrivite, e aproape la fel de veche ca aritmetica însăși. Există dovezi indirecte că babilonienii rezolvau ecuații complicate încă de pe la 2000 î.Cr., precum și dovezi directe privind rezolvarea problemelor mai simple, în textele tăbliței cu semne cuneiforme, datând de pe la 1700 î.Cr.

Fragmentul păstrat al tăbliței YBC 4652, din epoca babiloniană veche (1800–1600 î.Cr.), conține unsprezece probleme de rezolvat; din text rezultă că inițial erau douăzeci și două. O întrebare tipică e următoarea:

„Am găsit o piatră, dar n-am cântărit-o. După ce am cântărit de șase ori greutatea ei, am adăugat 2 *gin* și am mai adăugat o treime dintr-o șeptime înmulțită cu 24 și am cântărit-o. Rezultatul a fost 1 *ma-na*. Care era greutatea inițială a pietrei?"

O greutatea de 1 *ma-na* înseamnă 60 *gin*.

În notația modernă, am nota cu x greutatea căutată exprimată în *gin*. Atunci problema ne spune că

$$(6x + 2) + 1/3 \times 1/7 \times 24(6x + 2) = 60$$

iar metodele standard ale algebrei conduc la rezultatul $x = 4\ ^1/_3$ *gin*. Tăblița ne oferă acest răspuns, dar nu ne arată clar cum se obține. Putem fi siguri că nu erau folosite metode simbolice precum cele actuale, deoarece tăblițe ulterioare recomandă metode de rezolvare folosind exemple tipice – „se împarte numărul acesta la doi, se adună produsul celor două numere, se calculează rădăcina pătrată..." etc.

Această problemă, împreună cu celelalte de pe YBC 4652, reprezintă, în limbajul actual, o ecuație *liniară*, ceea ce înseamnă că necunoscuta x apare doar la puterea întâi. Toate aceste ecuații pot fi scrise sub forma:

$$ax + b = 0$$

având soluția $x = -b/a$. Dar în Antichitate, fără noțiunea de număr negativ și fără operații simbolice, găsirea soluției nu era atât de simplă. Chiar și azi, mulți elevi ar avea de furcă cu problema din YBC 4652.

Mai interesante sunt ecuațiile *pătratice*, în care necunoscuta poate apărea și ridicată la puterea a doua – la pătrat. Formularea modernă este:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

și există o formulă standard pentru aflarea lui x. Abordarea babiloniană e exemplificată de o problemă din tăblița BM 13901:

„Am adunat de şapte ori latura pătratului şi de unsprezece ori aria sa [obţinând] 6;15."

(Aici 6;15 e forma simplificată a notaţiei sexagesimale babiloniene, însemnând 6 plus 15/60, sau 6 ¼ cu notaţia modernă.) Rezolvarea prezentată e următoarea:

„Scrii 7 şi 11. Înmulţeşti 6;15 cu 11, [obţinând] 1,8;45. Împarţi în două 7, [obţinând] 3;30 şi 3;30. Înmulţeşti, [obţinând] 12;15. Aduni [aceasta] cu 1,8;45 [obţinând] rezultatul 1,21. Acesta e pătratul lui 9. Scazi 3;30, pe care l-ai înmulţit, din 9. Rezultatul e 5;30. Reciproca lui 11 nu se poate găsi. Cu cât trebuie înmulţit 11 pentru a obţine 5;30? [Răspunsul e] 0;30, deci latura pătratului este 0;30."

...tăbliţa îi spune cititorului ce să facă, dar nu şi de ce.

Să observăm că tăbliţa îi spune cititorului ce să facă, dar nu şi de ce. Este o reţetă. Pentru a o scrie, cineva trebuie să fi înţeles de ce funcţiona, însă odată descoperită, putea fi folosită de orice om instruit corespunzător. Nu ştim dacă în şcolile babiloniene se învăţa doar reţeta sau se şi explica de ce funcţionează.

Această reţetă pare obscură, dar e mai uşor de interpretat decât ne-am aştepta. Numerele complicate de fapt ne ajută: ele ne spun ce reguli se folosesc. Pentru a le găsi trebuie doar să procedăm sistematic. Cu notaţia modernă:

$$a = 11,\ b = 7,\ c = 6;15 = 6\ ¼$$

Astfel ecuaţia ia forma

$$ax^2 + bx = c$$

cu acele valori particulare pentru a, b, c. Trebuie să-l deducem pe x. Metoda babiloniană ne spune:

(1) Înmulţeşte c cu a, ceea ce dă ac.

(2) Împarte b la 2, ceea dă $b/2$.

(3) Ridică la pătrat $b/2$, ceea ce dă $b^2/4$.

(4) Adună-l pe acesta la ac, ceea ce dă $ac + b^2/4$.

(5) Extrage rădăcina pătrată $\sqrt{ac + b^2/4}$

(6) Scade $b/2$, ceea ce dă $\sqrt{ac + b^2/4} - b/2$.

(7) Împarte la a, iar răspunsul este $x = \dfrac{\sqrt{ac + b^2/4} - b/2}{a}$

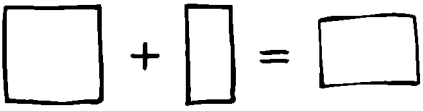
Acesta e echivalent cu formula

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

care se învață astăzi, pentru că, trecând termenul c al ecuației în membrul stâng, el devine $-c$.

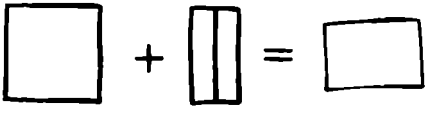
E limpede că babilonienii știau că procedeul lor era unul general. Exemplul citat e prea complex pentru ca soluția să fie una particulară, potrivită doar acestei probleme.

Ce credeau babilonienii despre metoda lor și cum au descoperit-o? Trebuie să fi existat o idee destul de simplă în spatele unui procedeu atât de complicat. Deși nu există dovezi directe, pare plauzibil că au avut ideea geometrică de a completa pătratul. Versiunea ei algebrică e predată și azi în școli. Problema, pe care alegem s-o scriem sub forma: $x^2 + ax = b$, o putem reprezenta grafic



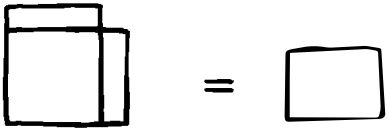
$x^2 \quad + \quad ax \quad = \quad b$

Pătratul și primul dreptunghi au înălțimea x; lățimile lor sunt x și respectiv a. Dreptunghiul din dreapta are aria b. Rețeta babiloniană împarte primul dreptunghi în două



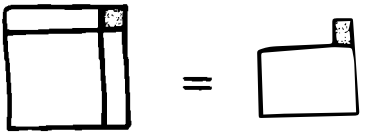
$x^2 \quad + \quad 2(^a/_2 \times x) \quad = \quad b$

Putem apoi rearanja cele două părți lipindu-le pe laturile pătratului



$x^2 + 2(^a/_2 \times x) \quad = \quad b$

Figura din pagina următoare se cere acum completată prin adăugarea unui pătrat hașurat pentru a deveni un pătrat mai mare



Pentru ca ecuația să rămână valabilă, se adaugă același pătrat haşurat şi imaginii din dreapta. Recunoaştem acum în stânga un pătrat cu latura $(x + {}^{a}/_{2})$, iar imaginea geometrică e echivalentă cu egalitatea algebrică

$$x^2 + 2({}^{a}/_{2} \times x) + ({}^{a}/_{2})^2 = b + ({}^{a}/_{2})^2$$

Deoarece în stânga avem un pătrat, egalitatea se poate rescrie ca

$$(x + {}^{a}/_{2})^2 = b + ({}^{a}/_{2})^2$$

iar apoi e firesc să extragem rădăcina pătrată

$$x + {}^{a}/_{2} = \sqrt{b + ({}^{a}/_{2})^2}$$

şi, în final, rearanjând termenii, deducem că

$$x = \sqrt{b + ({}^{a}/_{2})^2} - {}^{a}/_{2}$$

ceea ce reprezintă tocmai rețeta babiloniană.

Nu s-a găsit nici o dovadă scrisă că această construcție geometrică i-ar fi condus pe babilonieni la rețeta lor. Ipoteza e însă plauzibilă şi e confirmată indirect de diverse desene care apar pe tăblițele de lut.

Al-jabr

Cuvântul „algebră“ provine din termenul arab *al-jabr*, folosit de Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī pe la 820. Lucrarea sa *Tratatul despre calculul prin* al-jabr w'al-muqabala explica metodele generale de rezolvare a ecuațiilor prin operarea cu cantități necunoscute.

Al-Khwārizmī folosea cuvinte, nu simboluri, dar metodele lui sunt evident asemănătoare cu cele predate azi în şcoli. *Al-jabr* înseamnă „a adăuga cantități egale în ambii membri ai unei ecuații“, ceea şi ce facem atunci când pornim de la

$$x - 3 = 5$$

şi deducem că

$$x = 8$$

Într-adevăr, facem deducția adăugând 3 în ambii membri. *Al-muqabala* are două înțelesuri. Există unul particular: „a extrage cantități egale din ambii membri ai unei ecuații", ceea ce facem pentru a trece de la

$$x + 3 = 5$$

la soluția

$$x = 2$$

Dar mai are și un înțeles general: „comparație".

Al-Khwārizmī dă reguli generale pentru rezolvarea a șase tipuri de ecuații, care pot fi folosite pentru rezolvarea tuturor ecuațiilor liniare și pătratice. Găsim deci în cartea sa ideile algebrei elementare, dar nu și folosirea simbolurilor.

Cuvântul algebra provine din termenul arab *al-jabr*

Ecuațiile cubice

Babilonienii știau să rezolve ecuațiile pătratice, iar metoda lor era în esență cea care se învață și azi. Ea nu presupune ceva mai complicat algebric decât extragerea rădăcinii pătrate, pe lângă operațiile aritmetice clasice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire). Pasul următor sunt ecuațiile cubice, implicând ridicarea necunoscutei la cub. Scriem asemenea ecuații sub forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

unde x e necunoscuta, iar coeficienții a, b, c, d sunt numere cunoscute. Dar până la introducerea numerelor negative, matematicienii clasificau ecuațiile cubice în multe categorii diferite – așa încât, de exemplu, $x^3 + 3x = 7$ și $x^3 - 3x = 7$ erau considerate complet diferite și necesitau metode diferite de rezolvare.

Grecii au descoperit cum pot folosi secțiunile conice pentru a rezolva unele ecuații cubice. Algebra modernă arată că dacă două conice se intersectează, punctele de intersecție sunt determinate de o ecuație de gradul trei sau patru (în funcție de conice). Grecii nu cunoșteau acest fapt general, dar i-au exploatat consecințele în anume condiții, folosind conicele drept un nou tip de instrument geometric.

Această nouă abordare a fost completată și notată de persanul Omar Khayyám, cunoscut mai ales pentru poemul său *Rubáiyát*. Pe la 1075 el a clasificat ecuațiile cubice în 14 tipuri și a arătat cum se poate rezolva fiecare tip folosind conicele, în lucrarea sa *Despre demonstrarea problemelor de algebră și* muqabala. Tratatul era un tur de forță în geometrie și lămurea aproape

ŞIRUL LUI FIBONACCI

A treia parte din *Liber abbaci* conţine o problemă care pare să fi fost inventată de Leonardo: „Un om pune o pereche de iepuri într-un loc înconjurat din toate părţile de un zid. Câte perechi de iepuri se pot obţine din această pereche într-un an, dacă lunar fiecare pereche dă naştere unei noi perechi, care din luna următoare devine şi ea productivă?"

Această problemă bizară conduce la un straniu şi faimos şir de numere:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

şi aşa mai departe. Fiecare număr e suma celor două numere precedente. Acesta e *şirul lui Fibonacci* şi apare adesea în matematică şi în natură. De exemplu, la multe flori numărul petalelor corespunde şirului lui Fibonacci. Nu e o coincidenţă, ci consecinţa tiparului de creştere al plantei şi a geometriei aşa-numitelor „primordia" – mici grupuri de celule din vârful lăstarului, care determină structuri importante, inclusiv petalele.

Deşi regula de creştere a lui Fibonacci pentru populaţiile de iepuri e nerealistă, acum se folosesc reguli mai generale de acelaşi tip (numite *modele Leslie*) pentru probleme legate de dinamica populaţiilor – studiul schimbărilor dimensiunii populaţiilor de animale, pe măsură ce ele se înmulţesc şi mor.

complet problema. Un matematician modern ar avea obiecţii – unele dintre cazurile lui Omar nu sunt complet rezolvate, deoarece el presupune că anumite puncte construite geometric există, deşi nu se întâmplă întotdeauna aşa –, conicele nu se intersectează întotdeauna. Însă acestea sunt scăpări minore.

Rezolvarea geometrică a ecuaţiilor cubice funcţiona, dar exista oare şi una algebrică, implicând rădăcini cubice, şi nimic mai complicat? Matematicienii Renaşterii italiene au făcut una dintre cele mai mari descoperiri în algebră când au înţeles că răspunsul e afirmativ. Pe atunci, matematicienii îşi făureau reputaţia participând la competiţii publice. Fiecare concurent îi dădea adversarului probleme, iar cel care rezolva cele mai multe era declarat învingător. Publicul putea paria pe câştigător. Concurenţii pariau adesea sume mari – odată, învinsul a trebuit să-i plătească învingătorului (şi prietenilor săi) treizeci de banchete. În plus, câştigătorul avea şanse mai mari să atragă elevi care plăteau, în special dintre nobili. Astfel, întrecerile matematice publice erau o afacere serioasă.

...întrecerile matematice publice erau o afacere serioasă.

În 1535 s-a organizat un asemenea concurs între Antonio Fior și Niccolo Fontana, poreclit Tartaglia, „Bâlbâitul". Tartaglia a măturat podeaua cu Fior, iar vestea succesului său s-a răspândit, ajungând și la urechile lui Girolamo Cardano. Cardano a ciulit urechile. Tocmai lucra la un tratat de algebră, iar problemele pe care și le puseseră Fior și Tartaglia țineau de ecuațiile cubice. Pe atunci, ecuațiile cubice erau împărțite în trei tipuri, tot fiindcă numerele negative nu erau recunoscute. Fior știa să rezolve doar un tip de ecuații. La început, Tartaglia știa să rezolve și el doar un alt tip. Cu notația modernă, soluția sa pentru ecuația de tipul $x^3 + ax = b$ era

$$x = \sqrt{\frac{b^3}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt{\frac{b^3}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

La ce le-a ajutat algebra

Câteva capitole din *Liber abbaci* conțin probleme de algebră relevante pentru nevoile negustorilor. Una dintre ele, nu tocmai practică, sună astfel: „Un om cumpără 30 de păsări – potârnichi, porumbei și vrăbii. O potârniche costă 3 monede de argint, un porumbel 2 monede, iar o vrabie $^1/_2$. El plătește 30 de monede de argint. Câte păsări de fiecare fel a cumpărat?" Cu notația modernă, dacă x e numărul de potârnichi, y numărul de porumbei și z numărul de vrăbii, atunci trebuie să rezolvăm două ecuații:

$$x + y + z = 30$$
$$3x + 2y + {}^1/_2 z = 30$$

Pentru numere reale sau raționale, aceste ecuații ar avea o infinitate de soluții, dar există condiția suplimentară implicită ca x, y și z să fie numere întregi. Se dovedește că există o singură soluție: 3 potârnichi, 5 porumbei și 22 de vrăbii.

Leonardo menționează și o serie de probleme legate de cumpărarea unui cal. Un om îi spune altuia: „Dacă îmi dai o treime din banii tăi, pot cumpăra calul." Celălalt spune: „Dacă îmi dai un sfert din banii tăi, pot cumpăra calul." Cât costă calul? De această dată sunt mai multe soluții; cea mai mică în numere întregi dă un preț al calului de 11 monede de argint.

Omar Khayyám e mai cunoscut pentru poezia sa, dar a fost şi un mare matematician.

Într-un moment de inspiraţie, cu vreo săptămână înainte de concurs, Tartaglia a descoperit cum să rezolve şi celelalte tipuri. I-a dat apoi lui Fior doar acele tipuri pe care ştia că acesta nu le putea rezolva.

Aflând de întrecere, Cardano şi-a dat seama că cei doi concurenţi găsiseră metodele de rezolvare a ecuaţiilor cubice. Vrând să le cuprindă în cartea sa, l-a rugat pe Tartaglia să-i dezvăluie metodele. Firește, Tartaglia ezita, fiindcă mijloacele sale de trai depindeau de acestea, dar până la urmă s-a lăsat convins să divulge secretul. După spusele lui Tartaglia, Cardano i-a promis că nu va dezvălui în public metoda. Pe bună dreptate Tartaglia a fost revoltat când ea a apărut în cartea lui Cardano *Ars magna – Marea artă a algebrei*. S-a plâns amarnic şi l-a acuzat pe Cardano de plagiat.

Cardano era departe de a fi curat ca lacrima. Era un jucător împătimit, care câştigase şi pierduse mari sume de bani la jocurile de cărţi, zaruri, ba chiar şi la şah. Prăpădise astfel întreaga avere a familiei, ajungând sărac. Era însă un geniu, un medic priceput, un matematician strălucit şi un scriitor cultivat – dar aceste calităţi erau subminate de o sinceritate deseori lipsită de menajamente şi

jignitoare. Tartaglia poate fi deci înțeles că l-a acuzat de minciună și furt. Faptul că meritele îi fuseseră recunoscute în cartea lui Cardano nu făcea decât să înrăutățească situația; Tartaglia știa că cel ce va rămâne în memoria cititorilor va fi autorul cărții, iar nu o persoană obscură menționată într-o frază sau două.

Cardano avea însă o scuză și un motiv temeinic de a-și încălca promisiunea făcută lui Tartaglia: elevul lui Cardano, Lodovico Ferrari, descoperise o metodă de rezolvare a ecuațiilor cvartice, cele implicând puterea a patra a necunoscutei. Era ceva cu totul nou și de o importanță uriașă. Desigur, Cardano voia să includă ecuațiile cvartice în cartea sa, din moment ce autorul descoperirii era elevul său. Însă metoda lui Ferrari reducea rezolvarea ecuației cvartice la cea a unei ecuații cubice asociate, așa încât se baza pe rezolvarea ecuațiilor cubice, oferită de Tartaglia. Cardano nu putea publica rezultatele lui Ferrari fără a le publica și pe cele ale lui Tartaglia.

Apoi a primit vești care îl scoteau din încurcătură. Fior, care pierduse întrecerea publică cu Tartaglia, era elevul lui Scipio del Ferro. Cardano a aflat că del Ferro rezolvase toate cele trei tipuri de ecuații cubice, nu numai pe acela despre care îi vorbise lui Fior. Se zvonea că un anume Annibale del Nave deținea lucrările nepublicate ale lui del Ferro. Astfel, Cardano și Ferrari s-au dus la Bologna în 1543 să discute cu del Nave, au văzut lucrările – iar acolo se afla rezolvarea celor trei tipuri de ecuații cubice. Cardano putea deci spune cu mâna pe inimă că n-a publicat metoda lui Tartaglia, ci pe cea a lui del Ferro.

Tartaglia privea lucrurile altfel, dar nu putea răspunde la afirmația lui Cardano că rezolvarea era cea descoperită de del Ferro. Tartaglia a publicat o lungă și amară diatribă privind întreaga afacere, iar Ferrari, pentru a-și apăra maestrul, l-a provocat la o dezbatere publică. Ferrari l-a învins cu ușurință, iar Tartaglia nu și-a mai revenit niciodată după acest eșec.

Simbolismul algebric

Matematicienii Renașterii italiene au elaborat multe metode algebrice, dar sistemul lor de notație era încă rudimentar. Au trebuit să treacă sute de ani pentru ca simbolismul algebric actual să apară.

Unul dintre primii care au folosit simboluri în locul numerelor necunoscute a fost Diofant din Alexandria. Lucrarea sa *Aritmetica*, scrisă pe la 250, cuprindea inițial 13 cărți, dintre care s-au păstrat doar șase sub forma unor copii ulterioare. Subiectul principal este rezolvarea ecuațiilor algebrice, fie în numere întregi, fie în numere raționale – fracții de tipul p/q, unde p și q sunt numere întregi. Notația lui Diofant diferă mult de cea actuală. Deși *Aritmetica*

Girolamo Cardano
(alias Hieronymus Cardanus, Jérôme Cardan)
1501–1576

Girolamo Cardano era fiul nelegitim al avocatului milanez Fazio Cardano şi al unei tinere văduve pe nume Chiara Micheria, care avea de crescut trei copii. Aceştia au murit de ciumă la Milano, în timp ce în apropiere, la Pavia, Chiara îl năştea pe Girolamo. Fazio era un matematician talentat şi i-a transmis această pasiune lui Girolamo. Împotriva dorinţei tatălui său, Girolamo a studiat medicina la Universitatea din Pavia; Fazio ar fi vrut ca el să studieze dreptul.

Pe când era încă student, Cardano a fost ales, doar cu un singur vot, rector al Universităţii din Padova, unde se mutase între timp. Deoarece cheltuise averea modestă moştenită după decesul tatălui său, Cardano s-a îndreptat spre jocuri pentru a-şi spori veniturile: cărţi, zaruri şi şah. Purta mereu un pumnal asupra lui, iar odată i-a crestat faţa unui adversar pe care credea că l-a prins trişând.

În 1525 Cardano a obţinut diploma de medic, dar cererea sa de a intra în Colegiul Medicilor din Milano a fost respinsă, pesemne fiindcă avea reputaţia de a fi un om dificil. A practicat medicina în satul Sacca şi s-a însurat cu Lucia Bandarini, fata unui căpitan. Medicina nu i-a adus bani, aşa încât, în 1533, a revenit la jocurile de noroc, dar de data asta a pierdut mult, trebuind să amaneteze bijuteriile soţiei şi o parte din mobilă.

Norocul i-a surâs lui Cardano: i s-a oferit postul de lector de matematică la Fundaţia Piatti, post deţinut înainte de tatăl său.

A continuat să practice în paralel medicina, iar câteva vindecări miraculoase i-au sporit faima. Pe la 1539, după mai multe încercări, a fost în fine primit în Colegiul Medicilor. A început să publice studii despre diverse subiecte, inclusiv matematică. Cardano a scris o autobiografie remarcabilă, *Cartea vieţii mele*, un amalgam de capitole pe diferite teme. Faima sa ajunsese la apogeu când a fost chemat la Edinburgh pentru a-l trata pe arhiepiscopul John Hamilton de la St. Andrews, care suferea de un astm foarte grav. După tratamentul lui Cardano starea sănătăţii sale s-a îmbunătăţit uimitor, iar Cardano a părăsit Scoţia mai bogat cu 2 000 de coroane de aur.

A devenit profesor la Universitatea din Pavia, iar toate îi mergeau din plin, până când fiul său cel mare, Giambattista, s-a căsătorit în secret cu Brandonia di Seroni, „o femeie nedemnă şi nerușinată", după spusele lui Cardano. Ea şi familia ei l-au umilit în public pe Giambattista, care apoi a otrăvit-o. Cu toate intervenţiile disperate ale lui Cardano, Giambattista a fost executat. În 1570 Cardano a fost condamnat pentru erezie, deoarece făcuse horoscopul lui Isus Cristos. A fost întemniţat, apoi eliberat, dar şi-a pierdut postul de la universitate. A plecat la Roma, unde, surprinzător, papa i-a oferit o pensie şi a fost primit în Colegiul Medicilor.

Şi-a prezis data morţii, şi se spune că ar fi făcut în aşa fel încât previziunea să se adeverească, sinucigându-se. În ciuda atâtor suferinţe, a rămas optimist până la capăt.

e singurul document rămas pe această temă, există mărturii fragmentare care demonstrează că Diofant nu era o figură izolată, ci aparținea unei tradiții bogate. Notația lui Diofant nu e prea potrivită pentru calcule, dar le rezumă într-o formă compactă.

Au trebuit să treacă sute de ani pentru ca simbolismul algebric actual să apară.

Matematicienii arabi din Evul Mediu au elaborat metode sofisticate de rezolvare a ecuațiilor, dar le-au exprimat în cuvinte, nu în simboluri.

Trecerea la notația simbolică a luat avânt în perioada Renașterii. Primul dintre marii algebriști care a folosit simbolurile a fost François Viète, care și-a notat multe dintre rezultate în formă simbolică, dar notația lui diferă mult de cea modernă. El a folosit însă literele alfabetului pentru a reprezenta și cantitățile cunoscute, și pe cele necunoscute. Pentru a le deosebi, a adoptat convenția folosirii consoanelor *B*, *C*, *D*, *F*, *G*... pentru cantitățile cunoscute, iar a vocalelor *A*, *E*, *I*... pentru cele necunoscute.

În secolul XV și-au făcut făcut apariția câteva simboluri rudimentare, în special literele *p* și *m* pentru adunare și scădere: *plus* și *minus*. Erau mai degrabă abrevieri decât simboluri adevărate. Simbolurile + și – au apărut cam în același timp în comerț, unde erau folosite de negustătorii germani pentru a diferența excedentul de deficit. Matematicienii le-au preluat curând, primele exemple de folosire a lor în scris datând din 1481. William Oughtred a introdus

SISTEMUL DE NOTARE A LUI DIOFANT ȘI CEL ACTUAL

Semnificație	Simbol modern	Simbolul lui Diofant
Necunoscuta	x	γ
Pătratul ei	x^2	Δγ
Puterea a treia	x^3	Kγ
Puterea a patra	x^4	ΔγΔ
Puterea a cincea	x^5	ΔKγ
Puterea a șasea	x^6	KγK
Adunare	+	Termeni juxtapuși (se scrie *AB* în loc de *A*+*B*)
Scădere	–	↑
Egalitate	=	ισ

simbolul × pentru înmulțire și a fost criticat de Leibniz fără menajamente (și pe bună dreptate) pentru că simbolul putea fi lesne confundat cu litera *x*.

În 1557, în cartea sa *Gresia lui Witte*, matematicianul englez Robert Recorde a inventat simbolul = pentru egalitate, rămas de atunci în uz. El spunea că nu-și poate închipui două lucruri mai asemănătoare decât două linii paralele de aceeași lungime, însă folosea linii mult mai lungi decât cele din prezent, ceva în genul ═══. Viète scria la început cuvântul *aequalis* pentru egalitate, dar ulterior l-a înlocuit cu simbolul ~ . René Descartes folosea un simbol diferit, ∝.

Simbolurile > și < pentru „mai mare decât" și „mai mic decât" i se datorează lui Thomas Harriot. Parantezele rotunde ( ) au apărut în 1544, iar cele pătrate [ ] și acoladele { } erau folosite de Viète pe la 1593. Descartes folosea pentru extragerea rădăcinii pătrate simbolul √, care este o modificare a literei *r* de la *radix* (rădăcină); pentru rădăcina cubică scria $\sqrt{}_c$.

Pentru a vedea cât de diferită era notația algebrică din Renaștere față de cea actuală, iată un scurt fragment din cartea *Ars magna* a lui Cardano

$$5p: \mathrm{R}\ m: 15$$
$$5m: \mathrm{R}\ m:15$$
$$25m:m: 15\ qd.\ est\ 40$$

În notația actuală aceasta s-ar scrie:

$$(5 + \sqrt{-15})\,(5- \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$$

Avem deci aici *p*: și *m*: pentru plus și minus, R pentru „rădăcina pătrată" și *qd. est* ca prescurtare a expresiei latine „adică". El scria

$$qdratu\ aeqtur\ 4\ rebus\ p: 32$$

acolo unde noi am scrie

$$x^2 = 4x + 32$$

și de aceea folosea prescurtări separate *rebus* și *qdratu* pentru necunoscută („lucrul") și pătratul ei. Altundeva a folosit R pentru necunoscută, Z pentru pătratul ei și C pentru cubul ei.

O figură influentă, dar puțin cunoscută, a fost francezul Nicolas Chuquet, a cărui carte *Triparty en la science des nombres* din 1484 dezbătea trei teme matematice principale: aritmetica, rădăcinile și necunoscutele. Notația lui pentru rădăcini semăna cu a lui Cardano, dar a început să sistematizeze lucrul cu puterile necunoscutei, prin folosirea exponenților. El numea primele patru

puteri ale necunoscutei *premier*, *champs*, *cubiez* şi *champs de champs*. Ceea ce noi am scrie $6x$, $4x^2$ şi $5x^3$ el nota cu .6.1, .4.2 şi .5.3. Folosea de asemenea puterea zero şi puterile negative, scriind .2.0 şi .3.$^{1.m.}$ acolo unde noi scriem 2 şi $3x^{-1}$. Pe scurt, folosea notaţia exponenţială pentru puterile necunoscutei, dar nu avea nici un simbol explicit pentru necunoscuta însăşi.

Această omisiune a fost corectată de Descartes. Notaţia lui era foarte asemănătoare cu cea actuală, cu o singură excepţie. Acolo unde noi am scrie

$$5 + 4x + 6x^2 + 11x^3 + 3x^4$$

Descartes scria

$$5 + 4x + 6xx + 11x^3 + 3x^4,$$

adică folosea xx pentru puterea a doua. Uneori însă folosea şi x^2. Newton scria puterile necunoscutei exact ca în prezent, inclusiv exponenţii fracţionali şi negativi, precum $x^{3/2}$ pentru rădăcina pătrată a lui x^3. Gauss a fost cel care, în sfârşit, a renunţat la xx pentru x^2; odată ce Marele Maestru a făcut-o, toţi ceilalţi i-au urmat exemplul.

Logica speciilor

Algebra a început ca un mijloc de a sistematiza problemele aritmeticii, dar în vremea lui Viète şi-a dobândit autonomia. Înainte de Viète, simbolismul şi operaţiile algebrice erau considerate modalităţi de a exprima şi efectua operaţiile aritmetice, dar numerele rămâneau subiectul principal. Viète a făcut o distincţie esenţială între ceea ce el numea logica speciilor şi logica numerelor. Din perspectiva lui, o expresie algebrică reprezenta o întreagă clasă (specie) de expresii aritmetice. Era un concept diferit. În cartea sa din 1591 *In artem analyticam isagoge* (*Introducere în arta analitică*), el arăta că algebra e o metodă de a opera cu formele generale, în timp ce aritmetica e o metodă de a opera cu anumite numere particulare.

Poate părea un fel de despicare a firului în patru, dar diferenţa de perspectivă era importantă. Pentru Viète, un calcul algebric cum ar fi (în notaţia actuală)

$$(2x + 3y) - (x + y) = x + 2y$$

reprezintă o modalitate de a manevra expresii simbolice. Termenii individuali $2x + 3y$ şi aşa mai departe sunt ei înşişi obiecte matematice. Ei se pot aduna, scădea, înmulţi şi împărţi fără a fi consideraţi vreodată reprezentări ale unor numere particulare. Pentru predecesorii lui Viète însă, aceeaşi ecuaţie era doar

o relație numerică, valabilă ori de câte ori numere particulare erau substituite simbolurilor x și y. Astfel, algebra și-a început existența independentă ca matematică expresiilor simbolice. Era primul pas spre eliberarea algebrei din încătușarea interpretării aritmetice.

La ce ne ajută algebra

Principalii consumatori de algebră în lumea modernă sunt oamenii de știință, care reprezintă regularitățile naturii sub forma ecuațiilor algebrice. Aceste ecuații pot fi rezolvate, astfel încât cantitățile necunoscute să fie exprimate în funcție de cele cunoscute. Tehnica a devenit atât de uzuală, încât nimeni nu-și mai dă seama că folosește algebra.

Algebra a fost aplicată în arheologie într-unul dintre episoadele serialului Time Team (Echipa timpului), când cutezătorii arheologi TV au vrut să determine cât de adâncă era o fântână medievală. Prima idee a fost să se arunce un obiect în ea și să se cronometreze cât durează până ajunge la fund. Au trecut șase secunde. Formula algebrică este

$$s = {}^1/_2 gt^2$$

unde s este adâncimea, t este timpul necesar pentru a ajunge la fund, iar g este accelerația gravitațională, aproximativ 10 metri pe secundă^2. Luând $t = 6$, formula ne arată că fântâna are aproximativ 180 de metri adâncime. Din cauza nesiguranței în privința formulei – pe care de fapt și-o amintiseră corect – membrii echipei au verificat rezultatul folosind trei rulete legate una de alta.

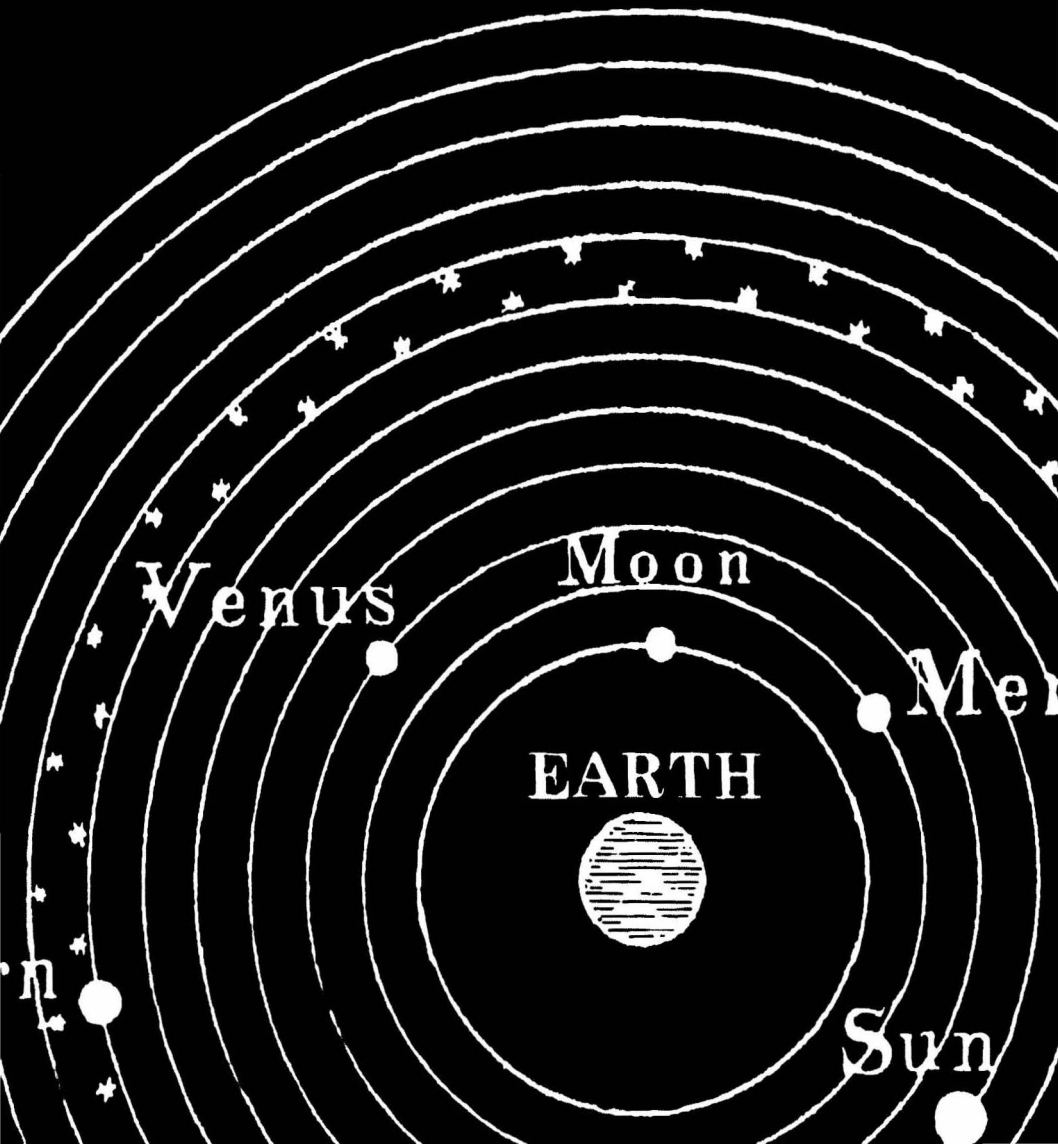
Adâncimea măsurată a fost într-adevăr foarte apropiată de 180 de metri. Algebra e mai vizibil implicată atunci când cunoaștem adâncimea și vrem să calculăm timpul. Acum trebuie să rezolvăm ecuația pentru a-l afla pe t în funcție de s și obținem

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

Știind, de exemplu, că $s = 180$ metri, putem estima că t este rădăcina pătrată din 360/10, adică rădăcina pătrată din 36 – ceea ce înseamnă 6 secunde.

5

Trigonometrie și logaritmi



Geometria euclidiană se bazează pe triunghiuri, în primul rând fiindcă orice poligon se poate construi din triunghiuri, iar multe alte forme interesante, cum sunt cercurile şi elipsele, pot fi aproximate prin poligoane. Proprietăţile metrice ale triunghiurilor – cele care pot fi măsurate, precum lungimile laturilor, dimensiunile unghiurilor sau aria totală – sunt legate prin diferite formule, multe dintre ele elegante. Folosirea practică a acestor formule, extrem de utile în navigaţie şi topografie, impunea dezvoltarea trigonometriei, care înseamnă „măsurarea triunghiurilor".

Trigonometria

Trigonometria a generat câteva funcţii speciale – reguli matematice pentru calculul unei cantităţi dintr-alta. Aceste funcţii au nume precum *sinus*, *cosinus* şi *tangentă*. Funcţiile trigonometrice s-au dovedit a fi de o importanţă imensă pentru întreaga matematică, nu doar pentru măsurarea triunghiurilor.

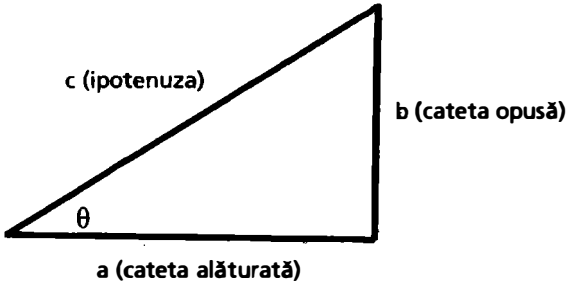
Trigonometria e una dintre cele mai folosite tehnici matematice, fiind implicată în toate, de la topografie şi navigaţie la sistemele GPS din automobile. Folosirea sa în ştiinţă şi tehnologie e atât de obişnuită încât de regulă trece neobservată, ca orice instrument universal. Din perspectivă istorică, ea a fost strâns legată de logaritmi, o metodă ingenioasă de a transforma înmulţirea (care e dificilă) în adunare (care e mai simplă). Ideile principale au apărut între 1400 şi 1600, însă cu o lungă perioadă pregătitoare şi multe îmbunătăţiri ulterioare, iar notaţia încă mai evoluează.

Omenirea datorează enorm acestor pionieri plini de devotament şi perseverenţă.

În acest capitol vom arunca o privire asupra elementelor de bază: funcţiile trigonometrice, funcţia exponenţială şi logaritmii. De asemenea, vom prezenta câteva aplicaţii, mai vechi şi mai noi. Multe dintre aplicaţiile vechi sunt tehnici de calcul care au ieşit din circulaţie odată cu răspândirea calculatoarelor. De exemplu, practic nimeni nu mai foloseşte logaritmii pentru a efectua înmulţiri. Nimeni nu mai foloseşte tabele, acum când computerele pot calcula rapid şi cu mare precizie valorile funcţiilor. Dar când au fost inventaţi logaritmii, tabelele lor numerice îi făceau utili, în special în domenii ca astronomia, unde erau necesare calcule

BREVIAR DE TRIGONOMETRIE

Trigonometria se bazează pe un ansamblu de funcţii speciale, dintre care mai simple sunt sinusul, cosinul şi tangenta. Aceste funcţii se aplică unui unghi, în mod tradiţional reprezentat prin litera grecească θ (teta). Ele pot fi definite în funcţie de elementele unui triunghi dreptunghic, ale cărui laturi *a*, *b*, *c*, se numesc cateta alăturată, cateta opusă şi ipotenuza.



Atunci:

Sinusul lui teta este	$\sin \theta = b/c$
Cosinusul lui teta este	$\cos \theta = a/c$
Tangenta lui teta este	$\text{tg } \theta = b/a$

După cum se vede, pentru orice unghi dat θ, valorile acestor trei funcţii sunt determinate de geometria triunghiului. (Acelaşi unghi poate apărea în triunghiuri de mărimi diferite, dar geometria triunghiurilor asemenea presupune că *rapoartele* enunţate nu depind de mărimea triunghiului.) Odată calculate şi tabelate, aceste funcţii pot fi folosite pentru a rezolva (a calcula toate laturile şi unghiurile) triunghiul pornind de la valoarea lui θ.

Cele trei funcţii sunt legate printr-un ansamblu de formule elegante. În particular, din teorema lui Pitagora rezultă că

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

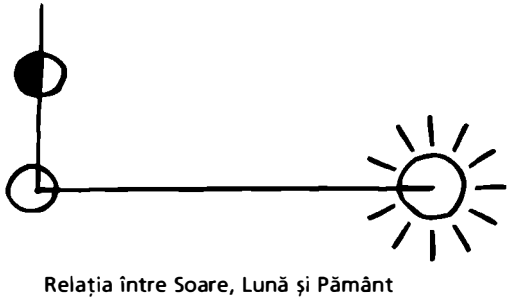
numerice lungi şi complicate. Iar cei care alcătuiau tabelele trebuiau să-şi petreacă ani buni – sau chiar decenii – efectuând calcule. Omenirea datorează enorm acestor pionieri plini de devotament şi perseverenţă.

Originile trigonometriei

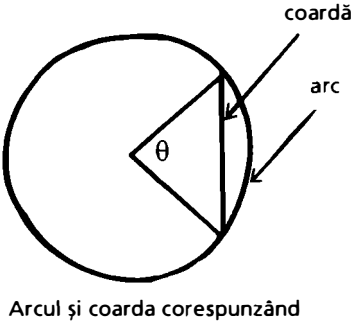
Problema de bază pe care şi-o pune trigonometria e calculul proprietăţilor unui triunghi – lungimile laturilor, dimensiunile unghiurilor – din alte asemenea proprietăţi. E mult mai uşor să prezentăm istoria veche a trigonometriei dacă rezumăm mai întâi trăsăturile principale ale trigonometriei moderne, care e în mare măsură o reluare cu notaţiile secolului XVIII a unor subiecte datând de pe vremea grecilor antici sau chiar dinainte. Acest rezumat ne oferă cadrul în care putem prezenta ideile anticilor, fără să ne împiedicăm în noţiuni obscure şi în cele din urmă vetuste.

Trigonometria pare să provină din astronomie, unde e destul de uşor să măsurăm unghiurile, dar dificil să măsurăm imensele distanţe. Astronomul grec Aristarh, în lucrarea *Despre dimensiunile şi distanţele Soarelui şi Lunii*, de pe la 260 î.Cr., a dedus că Soarele se află faţă de Pământ la o distanţă cam între 18 şi 20 de ori mai mare decât distanţa de la Pământ la Lună. (Cifra corectă este mai aproape de 400, dar Eudoxiu şi Phidias susţinuseră cifra 10.) Raţionamentul său era că atunci când Luna este pe jumătate plină, unghiul dintre direcţiile în care se află Soarele şi Luna este de aproximativ 87° (în unităţi moderne). Folosind proprietăţi ale triunghiurilor care conduc la estimări trigonometrice, el a dedus (cu notaţia modernă) că sin 3° se află între 1/18 şi 1/20, ceea ce a dus la aproximarea sa pentru raportul dintre distanţele până la Soare şi la Lună. Metoda era bună, dar observaţia era imprecisă, unghiul corect fiind 89,8°.

Primele tabele trigonometrice au fost alcătuite de Hiparh pe la 150 î.Cr. În locul funcţiei moderne sinus, el a folosit o mărime foarte apropiată, care din punct de vedere geometric era la fel de firească. Să ne imaginăm un cerc cu două raze întâlnindu-se sub un unghi θ. Punctele în care razele intersectează cercul pot fi unite printr-o dreaptă numită *coardă*. Ele pot fi considerate de asemenea capetele unei părţi a cercului numită *arc* de cerc.



Relaţia între Soare, Lună şi Pământ când Luna este pe jumătate plină



Arcul şi coarda corespunzând unui unghi θ

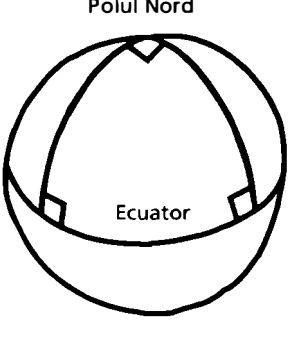
Hiparh a alcătuit un tabel punând în legătură lungimile arcului şi coardei pentru o serie de unghiuri. Dacă cercul are raza 1, atunci lungimea arcului este egală cu θ când unghiul e măsurat în unităţi numite *radiani*. Geometria elementară ne arată că lungimea coardei în notaţia modernă este $2 \sin \theta/2$. Astfel, calculul lui Hiparh seamănă bine cu un tabel al sinusurilor, chiar dacă nu a fost prezentat astfel.

Astronomia

Începuturile trigonometriei au fost mai complicate decât se învaţă azi la şcoală, iar aceasta din cauza nevoilor astronomiei (şi apoi ale navigaţiei). Spaţiul de lucru nu era planul, ci sfera. Corpurile cereşti pot fi considerate că se află pe o sferă imaginară, *sfera cerească*. Cerul arată într-adevăr ca interiorul unei sfere gigantice care îl înconjoară pe observator, iar corpurile cereşti sunt atât de îndepărtate încât par situate pe această sferă.

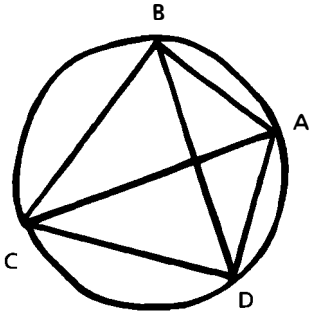
Calculele astronomice fac apel la geometria unei sfere, nu a unui plan, prin urmare e nevoie nu de geometria şi trigonometria plane, ci de geometria şi trigonometria sferice. Una dintre cele mai vechi lucrări din domeniu e *Sphaerica* lui Menelau, datând de pe la 100 d.Cr. O teoremă tipică, fără analogie în geometria euclidiană, e următoarea: dacă două triunghiuri au unghiurile egale, atunci ele sunt *congruente* – au aceeaşi formă şi mărime. (În geometria euclidiană, ele sunt asemenea – au aceeaşi formă, dar pot avea dimensiuni diferite.) În geometria sferică, unghiurile unui triunghi nu însumează 180°, ca în geometria plană. De exemplu, un triunghi ale cărui vârfuri se află în polul Nord şi în două puncte de pe Ecuator, separate prin 90°, are în mod clar toate cele trei unghiuri de 90°, astfel încât suma lor este 270°. În general, cu cât triunghiul e mai mare, cu atât e mai mare suma unghiurilor sale. De fapt, această sumă minus 180° este proporţională cu aria totală a triunghiului.

Aceste exemple arată limpede că geometria sferică are propriile ei caracteristici. Acelaşi lucru e valabil şi pentru trigonometria sferică, dar mărimile de bază sunt tot funcţiile trigonometrice standard. Doar formulele se schimbă.



Ptolemeu

Indiscutabil cel mai important text de trigonometrie al Antichităţii a fost *Tratatul de matematică* al lui Ptolemeu din Alexandria, datând de pe la 150 d.Cr. şi



Patrulater înscris
într-un cerc
și diagonalele sale

cunoscut și sub titlul de *Almagest* – „cel mai mare" în limba arabă. Cuprindea tabele trigonometrice, exprimate din nou în funcție de coarde, împreună cu metodele folosite pentru a le calcula, precum și un catalog de poziții ale stelelor pe sfera cerească. O trăsătură esențială a metodei de calcul era teorema lui Ptolemeu, care afirmă că dacă ABCD este un patrulater înscris într-un cerc (are vârfurile pe un cerc), atunci

$$AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$$

(suma produselor laturilor opuse e egală cu produsul diagonalelor).

O interpretare modernă a acestui fapt este remarcabila pereche de formule

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$
$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

Aceste formule spun că dacă știi sinusurile și cosinusurile a două unghiuri, atunci poți afla ușor sinusul și cosinusul sumei celor două unghiuri. Astfel, începând cu (de pildă) sin 1° și cos 1°, poți deduce sin 2° și cos 2° luând $\theta = \varphi = 1°$. Apoi poți deduce sin 3° și cos 3° luând $\theta = 1°$, $\varphi = 2°$ etc. Trebuia să știi cum să începi, pe urmă nu aveai nevoie decât de aritmetică – desigur destul de multă, dar fără alte complicații.

Începutul era mai ușor decât pare, cerând aritmetică și rădăcini pătrate. Folosind faptul evident că $\theta/2 + \theta/2 = \theta$, din teorema lui Ptolemeu rezulta că

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{2}$$

Pornind de la cos 90° = 0, poți înjumătăți repetat unghiul, obținând sinusuri și cosinusuri ale unor unghiuri oricât de mici. (Ptolemeu a folosit $^1/_4°$.) Pe urmă te poți întoarce la toți multiplii întregi ai acelui unghi mic. Pe scurt, pornind de la câteva formule trigonometrice generale și de la câteva valori simple pentru anumite unghiuri, poți calcula valorile practic oricărui unghi. A fost un tur de forță extraordinar și le-a dat de lucru astronomilor timp de peste o mie de ani.

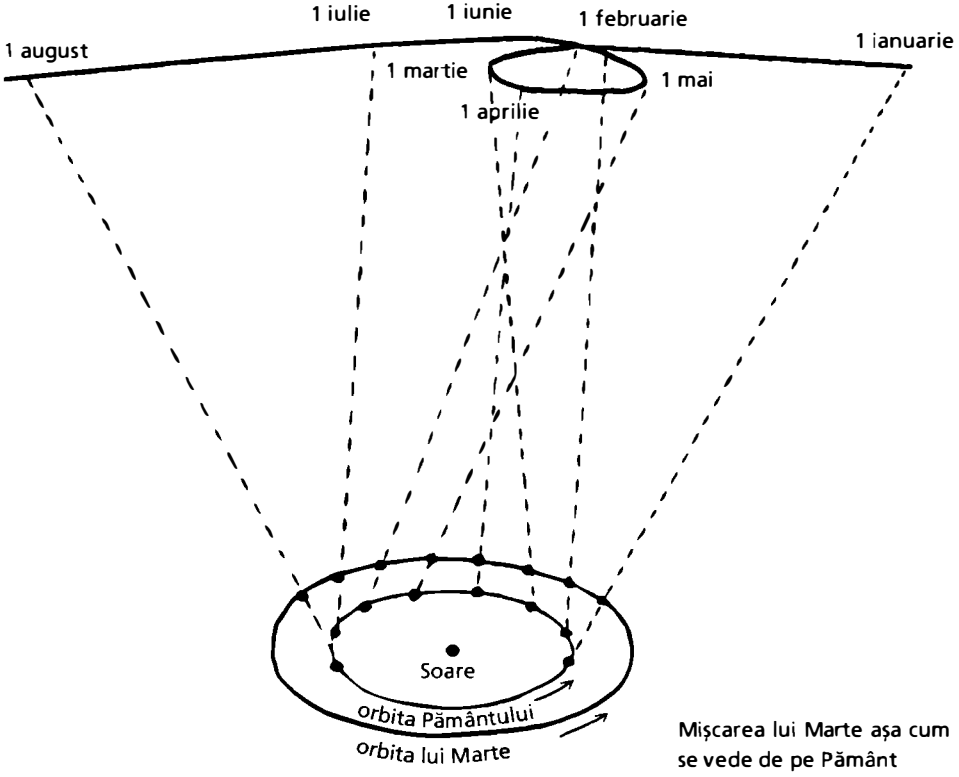
Un ultim lucru care merită spus despre *Almagest* e felul în care trata orbitele planetelor. Oricine observă cu regularitate cerul noaptea își dă imediat seama că planetele se deplasează pe fundalul stelelor fixe, iar traseele lor par complicate, uneori mișcându-se înapoi sau pe bucle alungite.

Răspunzând unei solicitări a lui Platon, Eudoxiu găsise un mijloc de a reprezenta aceste mişcări complexe prin sfere care se învârt în jurul altor sfere. Ideea a fost simplificată de Apoloniu şi Hiparh prin folosirea *epiciclurilor* – cercuri ale căror centre se mişcă pe alte cercuri şi aşa mai departe. Ptolemeu a perfecţionat sistemul epiciclurilor, oferind un model foarte exact al mişcării planetelor.

Începuturile trigonometriei

Primele noţiuni de trigonometrie au apărut în scrierile matematicienilor şi astronomilor indieni: *Pancha Siddhanta* a lui Varahamihira, din 500, *Brahma Sputa Siddhanta* a lui Brahmagupta, din 628, şi mai amănunţita *Siddhanta Siromani* a lui Bhaskaracharya, din 1150.

Matematicienii indieni foloseau de regulă o jumătate de coardă, sau *jya-ardha*, care e de fapt actualul sinus. Varahamihira a calculat această funcţie pentru 24 de multipli întregi ai lui $3^{o}45'$, până la 90^{o}. Pe la 600, în *Maha Bhaskariya*,



Mişcarea lui Marte aşa cum se vede de pe Pământ

Bhaskara a dat o utilă formulă de aproximare pentru sinusul unui unghi ascuțit, pe care i-a atribuit-o lui Aryabhata. Aceşti autori au dedus o serie de formule trigonometrice elementare.

În *Tratatul despre patrulater*, matematicianului arab Nasîr-Eddin a combinat geometria plană şi cea sferică într-o expunere unitară şi a dat câteva formule de bază pentru triunghiurile sferice. El a privit subiectul din perspectivă matematică, nu ca pe o parte a astronomiei. Dar lucrarea sa a fost cunoscută în Occident abia în 1450.

Primele noțiuni de trigonometrie au apărut în scrierile matematicienilor şi astronomilor indieni

Până atunci, din cauza legăturii cu astronomia, aproape întreaga trigonometrie era una sferică. În particular, topografia – care azi foloseşte din plin trigonometria – utiliza metode empirice, codificate de romani. Pe la mijlocul secolului XV însă, trigonometria plană a început să-şi intre în drepturi, inițial în Liga hanseatică din nordul Germaniei. Liga deținea controlul asupra comerțului, fiind deci bogată şi influentă. Astfel, avea nevoie de metode de navigație mai bune, precum şi de măsurarea mai precisă a timpului şi de utilizarea practică a observațiilor astronomice.

O personalitate-cheie a fost Johannes Müller, mai cunoscut sub numele de Regiomontanus. A fost elevul lui Georg von Peuerbach, care a început lucrul la o nouă versiune, corectată, a *Almagestei*. Finanțat de protectorul său Bernard Walther, el a calculat în 1471 un nou tabel al sinusurilor şi un tabel al tangentelor.

Alți matematicieni importanți ai secolelor XV şi XVI au calculat şi ei tabele trigonometrice, adesea cu extremă precizie. Georg Joachim Rheticus a calculat sinusurile pentru un cerc de rază 10^{15} – tabelele având o precizie de 15 zecimale, dar înmulțind toate numerele cu 10^{15} spre a obține numere întregi – pentru toți multiplii unei secunde de arc. El a enunțat legea sinusurilor pentru triunghiurile sferice

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

şi *legea cosinusurilor*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

în lucrarea sa *De triangulis*, scrisă în 1462–1463 şi publicată în 1533. Aici A, B, C sunt unghiurile triunghiului, iar a, b, c sunt laturile lui – măsurate prin unghiurile pe care le formează în centrul sferei.

Viète a scris pe larg despre trigonometrie, prima sa carte pe această temă fiind *Canon mathematicus* din 1579. A adunat şi sistematizat diferite metode de rezolvare a triunghiurilor, adică determinarea tuturor laturilor şi unghiurilor pornind de la informaţii parţiale. El a găsit noi identităţi trigonometrice, între care unele expresii interesante pentru sinusurile şi cosinusurile multiplilor întregi ai lui θ în funcţie de sinus şi cosinus de θ.

Logaritmii

A doua temă a acestui capitol e una dintre cele mai importante funcţii din matematică: logaritmul, $\log x$. Iniţial logaritmul era important deoarece satisface ecuaţia

$$\log xy = \log x + \log y$$

şi poate fi astfel folosit pentru a transforma înmulţirile (care sunt greoaie) în adunări (care sunt mai simple şi mai rapide). Ca să înmulţeşti două numere x şi y, mai întâi trebuie să le găseşti logaritmii, să-i aduni, iar apoi să găseşti numărul al cărui logaritm e acel rezultat (*antilogaritmul* lui). Acesta este produsul xy.

Odată ce tabelele de logaritmi erau calculate de matematicieni, ele puteau fi folosite de oricine înţelegea metoda. Din secolul XVII până la mijlocul secolului XX, practic toate calculele ştiinţifice, mai ales în astronomie, au folosit logaritmii. De pe la 1960 însă, calculatoarele electronice au scos din uz logaritmii pentru efectuarea calculelor. Dar noţiunea a rămas esenţială în matematică, deoarece logaritmii dobândiseră un rol fundamental în multe domenii ale matematicii, între care calculul diferenţial şi analiza complexă. De asemenea, multe procese fizice şi biologice implică un comportament logaritmic.

Acum privim logaritmul ca inversul exponenţialei. Folosind logaritmii în baza 10, care sunt o alegere firească pentru notaţia zecimală, spunem că x este logaritmul lui y dacă $y = 10^x$. De exemplu, deoarece $10^3 = 1000$, logaritmul lui 1000 (în baza 10) este 3. Proprietatea fundamentală a logaritmilor decurge din legea exponenţială

$$10^{a+b} = 10^a \times 10^b$$

Însă pentru ca logaritmul să fie util, trebuie să putem găsi un x corespunzând oricărui y real şi pozitiv. Urmând calea lui Newton şi a altora din epocă, ideea este că orice putere raţională $10^{p/q}$ poate fi definită ca rădăcina de ordinul q a lui 10^p. Deoarece orice număr real x poate fi aproximat oricât de bine printr-un

TRIGONOMETRIA PLANĂ

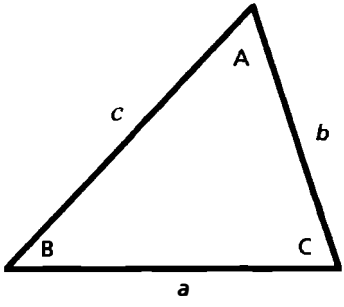
Acum studiul trigonometriei începe în plan, unde geometria e mai simplă, iar principiile de bază mai uşor de intuit. (Este ciudat cât de des noile idei matematice apar întâi într-un context complicat, iar simplitatea de fond devine vizibilă mult mai târziu.) Există o lege a sinusurilor şi una a cosinusurilor pentru triunghiurile plane şi este binevenită o scurtă digresiune pentru a le explica. Se consideră un triunghi plan cu unghiurile A, B, C şi laturile a, b, c. Legea sinusurilor ia forma

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

iar legea cosinusurilor este

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

împreună cu formulele corespunzând celorlalte unghiuri. Putem folosi legea cosinusurilor pentru a afla unghiurile unui triunghi cunoscându-i laturile.



Laturile şi unghiurile unui triunghi.

număr raţional p/q, îl putem aproxima pe 10^x prin $10^{p/q}$. Aceasta nu e cea mai eficientă cale de a *calcula* logaritmul, dar e modul cel mai simplu de a demonstra că el există.

Din perspectivă istorică, descoperirea logaritmilor a fost mai puţin directă. A început cu scoţianul John Napier, baron de Merchiston. El a fost preocupat toată viaţa de metodele eficiente de calcul şi a inventat *beţişoarele lui Napier* (sau *oasele lui Napier*), un set de beţişoare crestate care se puteau folosi pentru a efectua rapid şi corect înmulţiri simulând metodele cu creionul şi hârtia. Pe la 1594 a început elaborarea unei metode mai teoretice, iar scrierile sale ne arată că i-au trebuit 20 de ani pentru a o perfecţiona şi a o publica. Se pare că a început cu progresiile geometrice, şiruri de numere în care fiecare termen este obţinut din precedentul prin înmulţirea cu un număr fix – cum ar fi puterile lui 2

1 2 4 8 16 32...

sau puterile lui 10

1 10 100 1 000 10 000 100 000...

Se observase de mult că adunarea exponenților era echivalentă cu înmulțirea puterilor, ceea ce era util dacă voiai să înmulțești două numere întregi, puteri ale lui 2, de pildă, sau ale lui 10. Dar existau mari goluri între aceste numere, iar puterile lui 2 sau 10 nu păreau de mare ajutor dacă aveam de efectuat un produs de genul 57,681 × 29,443.

Logaritmi neperieni

În timp ce bravul baron încerca să umple cumva golurile din progresiile geometrice, medicul regelui Iacob al VI-lea al Scoției, James Craig, i-a vorbit lui Napier despre o descoperire larg folosită în Danemarca, purtând numele *prosthaphaeresis*. Aceasta se referea la orice procedeu care transforma produsele în sume. Principala metodă folosită practic se baza pe o formulă descoperită de Viète :

$$\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{2}$$

Având tabelele sinusurilor și cosinusurilor, puteam folosi această formulă pentru a converti un produs într-o sumă. Era complicat, dar mai rapid decât înmulțirea directă a numerelor.

Napier a adoptat ideea și i-a adus o îmbunătățire importantă. El a alcătuit o serie geometrică având o rație foarte apropiată de 1. Adică, în locul puterilor lui 2 sau ale lui 10, trebuie folosite, de pildă, puterile lui 1,0000000001. Puterile succesive ale unui asemenea număr se află la intervale foarte mici, iar astfel scăpăm de acele goluri supărătoare. Dintr-un motiv oarecare Napier a ales un raport ușor sub 1, și anume 0,9999999. Astfel, progresia lui geometrică e descrescătoare. De fapt, a început cu 10 000 000 și l-a înmulțit apoi cu puterile succesive ale lui 0,9999999. Dacă notăm cu Naplog x logaritmul lui x al lui Napier, acesta are bizara proprietate că

$$\text{Naplog } 10\,000\,000 = 0$$

$$\text{Naplog } 9\,999\,999 = 1$$

și așa mai departe. Logaritmul „neperian", Naplog x, satisface ecuația

$$\text{Naplog } (10^7 xy) = \text{Naplog } (x) + \text{Naplog } (y)$$

Aceasta poate fi folosită în calcule, pentru că e ușor să înmulțești sau să împarți cu o putere a lui 10, dar îi lipsește eleganța. Este totuși mult mai bună decât formula trigonometrică a lui Viète.

Logaritmi în baza zece

Următoarea îmbunătățire a apărut atunci când Henry Briggs, primul „profesor savilian" de geometrie de la Universitatea Oxford, l-a vizitat pe Napier. Briggs a sugerat înlocuirea ideii lui Napier cu una mai simplă: logaritmul (în baza zece) $L = \log_{10} x$, care satisface condiția

$$x = 10^L$$

Acum

$$\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$$

și astfel totul devine ușor. Pentru a-l găsi pe xy, se adună logaritmii lui x și y, iar apoi se află antilogaritmul rezultatului.

Înainte ca aceste idei să se fi răspândit, Napier a murit; era în 1617, iar lucrarea sa privind bețișoarele pentru calcule, *Rhabdologia*, tocmai fusese publicată. Metoda sa originală pentru calculul logaritmilor, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, a apărut doi ani mai târziu. Briggs și-a asumat sarcina de a alcătui un tabel de logaritmi briggsieni (în baza zece sau comună). El a făcut-o pornind de la $\log_{10} 10 = 1$ și calculând rădăcinile pătrate succesive. În 1617 a publicat *Logarithmorum chilias prima*, cuprinzând logaritmii numerelor întregi de la 1 la 1 000, cu o precizie de 14 zecimale. Lucrarea sa *Arithmetica logarithmica*, apărută în 1624, conținea tabelele logaritmilor comuni ai numerelor de la 1 la 20 000 și de la 90 000 la 100 000, de asemenea cu 14 zecimale.

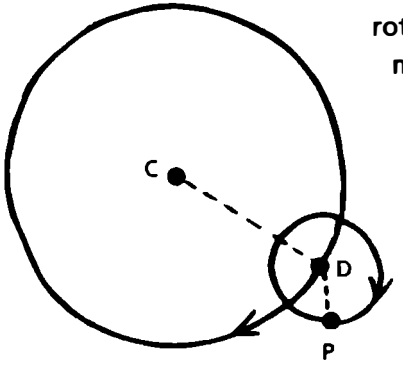
Ideea a luat amploare. John Speidell a calculat logaritmii funcțiilor trigonometrice (cum ar fi log sin x), publicând în 1619 *Noi logaritmi*. Ceasornicarul elvețian Jobst Bürgi și-a publicat cartea despre logaritmi în 1620 și se prea poate să fi avut ideea de bază încă din 1588, cu mult înaintea lui Napier. Dar dezvoltarea istorică a matematicii depinde de ce au publicat oamenii – în sensul originar de a face public –, iar ideile neîmpărtășite nu au nici o influență asupra altora. Meritul revine astfel, probabil pe bună dreptate, celor care își tipăresc ideile sau cel puțin le fac cunoscute prin scrisori. (Excepția o reprezintă cei care tipăresc ideile *altora*, asumându-și meritul lor. Aceștia nici nu intră în discuție.)

Numărul e

Unul dintre cele mai importante numere din matematică, acum reprezentat prin litera e, este asociat cu versiunea de logaritm a lui Napier. Valoarea sa este aproximativ 2,7128. El apare dacă încercăm să formăm logaritmi pornind de la

La ce i-a ajutat trigonometria

Almagesta **lui Ptolemeu a stat la baza tuturor studiilor privind mişcarea planetelor până la descoperirea lui Johannes Kepler că orbitele sunt eliptice. Mişcările observate ale planetelor sunt complicate de deplasarea relativă a Pământului, necunoscută pe vremea lui Ptolemeu. Chiar dacă planetele s-ar mişca cu viteză uniformă pe orbite circulare, rotaţia Pământului în jurul Soarelui ar presupune combinarea a două mişcări circulare distincte, iar un model exact trebuie să fie mult mai complicat decât cel al lui Ptolemeu. Schema epiciclurilor lui Ptolemeu combină mişcările circulare prin rotirea centrului unui cerc în jurul altui cerc. Acest cerc poate la rândul său să se rotească în jurul unui al treilea cerc şi aşa mai departe. Geometria mişcării circulare uniforme implică în mod firesc funcţiile trigonometrice, iar astronomii le-au folosit ulterior la calculul orbitelor.**



Un epiciclu. Planeta P se roteşte uniform în jurul punctului D, care la rândul său se roteşte uniform în jurul punctului C).

o serie geometrică a cărei raţie e uşor mai mare decât 1. Aceasta conduce la expresia $(1 + 1/n)^n$, unde n este un număr întreg foarte mare, şi, cu cât devine mai mare, cu atât expresia se apropie mai mult de un număr aparte, pe care îl notăm prin litera e.

Această formulă sugerează că există o bază naturală pentru logaritmi, care nu este nici 10, nici 2, ci e. Logaritmul natural al lui x este acel număr y care îndeplineşte condiţia $x = e^y$. Uneori baza e este explicitată ($y = \log_e x$), dar această notaţie se limitează la matematica din şcoală, deoarece în matematica superioară şi în ştiinţă singurul logaritm important e logaritmul natural. Logaritmii în bază zece sunt cei mai potriviţi pentru calcule în notaţia zecimală, dar logaritmii naturali sunt cu adevărat fundamentali în matematică.

Expresia e^x se numeşte *exponenţiala* lui x şi este una dintre cele mai importante noţiuni din întreaga matematică. Numărul e este unul dintre acele

ciudate numere speciale care apar în matematică şi au o semnificaţie majoră. Un alt asemenea număr este π. Aceste două numere reprezintă vârful unui aisberg – există multe altele. Se poate spune că ele sunt cele mai importante dintre numerele speciale, deoarecc apar peste tot în peisajul matematicii.

Unde ne-am afla fără ele?

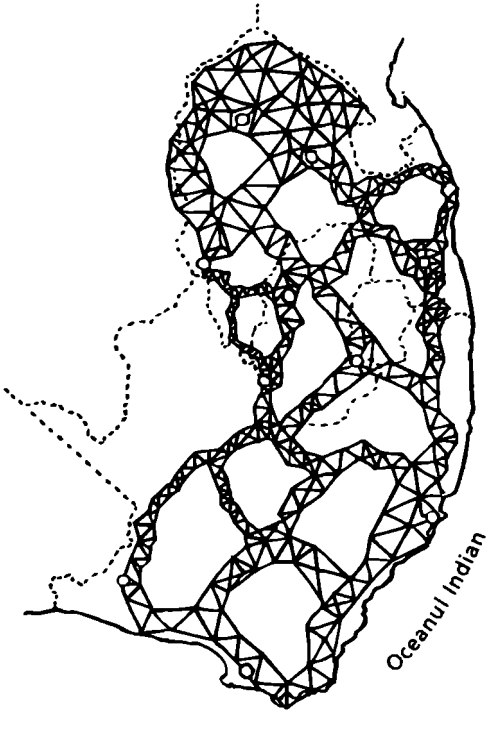
Datorăm enorm acelor vizionari care au inventat logaritmii şi trigonometria şi au petrecut ani de-a rândul calculând primele tabele numerice. Eforturile lor au deschis calea unei înţelegeri ştiinţifice cantitative a lumii naturale şi au înlesnit călătoriile şi comerţul internaţional prin îmbunătăţirea navigaţiei şi cartografierii. Tehnicile de bază ale topografiei se întemeiază pe calcule trigonometrice. Chiar şi în prezent, când echipamentul topografic foloseşte laserul, iar calculele sunt făcute de un cip specializat, noţiunile pe care le întruchipează laserul şi cipul sunt descendente directe ale trigonometriei care îi intriga pe matematicienii indieni şi arabi.

Logaritmii le-au permis oamenilor de ştiinţă să efectueze înmulţiri rapid şi precis. Douăzeci de ani de trudă a unui matematician la o carte cu tabele au economisit zeci de mii de ani de muncă a altor oameni de mai târziu. S-au putut astfel face cu creionul şi hârtia analize ştiinţifice care altminteri ar fi luat prea mult timp. Ştiinţa nu ar fi putut progresa fără o asemenea metodă. Beneficiile unei idei atât de simple au fost inestimabile.

La ce i-a ajutat trigonometria

Trigonometria e esențială pentru orice reprezentare topografică, de la șantiere de construcții la continente. E relativ ușor să măsori unghiurile cu mare precizie, dar distanțele sunt mai greu de măsurat, în special pe terenuri denivelate. De aceea topografii încep prin măsurarea atentă a unei lungimi, linia de referință, adică distanța dintre două poziții anumite. Apoi alcătuiesc o rețea de triunghiuri și folosesc unghiurile măsurate și trigonometria pentru a calcula laturile acestor triunghiuri. Astfel se poate construi o hartă precisă a întregii suprafețe vizate. Acest proces se numește triangulație. Pentru a-i verifica acuratețea, se poate face o a doua măsurare a distanțelor, odată ce triangulația e încheiată.

Figura alăturată înfățișează un exemplu clasic, un faimos releveu efectuat în Africa de Sud în 1751 de marele astronom Nicolas Louis de Lacaille. Scopul lui principal era de a cataloga stelele din emisfera sudică, dar pentru asta trebuia mai întâi să măsoare arcul unei linii de longitudine. De aceea a efectuat o triangulație la nord de Cape Town. Rezultatul său indica o curbură a Pământului mai pronunțată la nord decât la sud, deducție surprinzătoare care a fost confirmată prin măsurători ulterioare. Pământul seamănă puțin cu o pară. Activitatea sa de catalogare a fost atât de fructuoasă, încât el a denumit 15 dintre cele 88 de constelații recunoscute în prezent, după ce observase peste 10 000 de stele folosind un mic telescop cu refracție.



Triangulația Africii de Sud efectuată de Lacaille.

6

Geometria e algebră, algebra e geometrie

Deşi matematica se împarte de regulă în domenii distincte, cum sunt aritmetica, algebra, geometria etc., această clasificare ţine mai curând de comoditatea umană decât de adevărata structură a disciplinei. În matematică nu există graniţe stricte între domenii aparent deosebite, iar probleme care par să aparţină de un domeniu se pot rezolva prin metode din altul. De fapt, cele mai mari descoperiri constau adesea în stabilirea unei legături neaşteptate între teme anterior distincte.

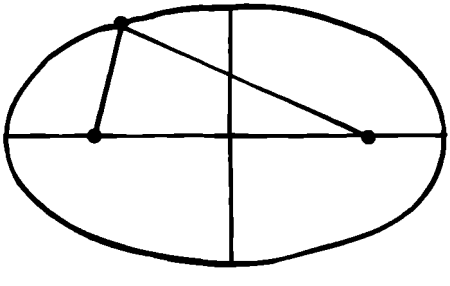
Fermat

În matematica greacă există urmele unor asemenea legături, de pildă între teorema lui Pitagora, numerele iraţionale şi folosirea de către Arhimede a unor analogii mecanice pentru a afla volumul sferei. Adevărata amploare şi influenţă a acestor fertilizări prin încrucişare a devenit limpede într-o scurtă perioadă de două decenii, în jurul anului 1630. În acest interval, doi dintre cei mai mari matematicieni ai lumii au descoperit o legătură remarcabilă între algebră şi geometrie. De fapt, ei au arătat că fiecare din aceste domenii poate fi convertit în celălalt prin folosirea coordonatelor. Tot ce găseşti la Euclid şi la urmaşii săi se poate reduce la calcule algebrice. Invers, toată algebra poate fi interpretată în termenii geometriei curbelor şi suprafeţelor.

Ne-am putea gândi că asemenea conexiuni fac ca un domeniu sau altul să devină superflue. Dacă toată geometria poate fi înlocuită prin algebră, de ce mai avem nevoie de geometrie? Răspunsul este că fiecare domeniu are propriul său punct de vedere, iar acesta poate fi uneori extrem de pătrunzător şi de puternic. Uneori e cel mai bine să gândeşti geometric, alteori gândirea algebrică e superioară.

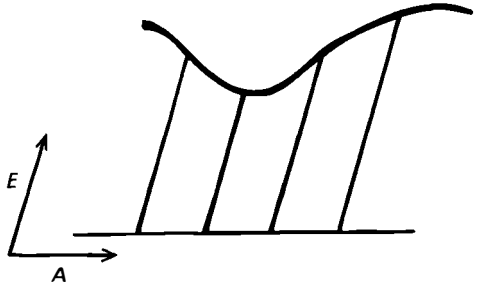
Cel care a introdus coordonatele a fost Pierre de Fermat. El e mai cunoscut pentru contribuţiile sale în teoria numerelor, dar a studiat şi multe alte domenii ale matematicii, inclusiv probabilităţile, geometria şi aplicaţiile opticii. Pe la 1620, Fermat încerca să înţeleagă geometria curbelor şi s-a apucat să reconstituie, din puţinele

Proprietatea focarelor elipsei



informații disponibile, o carte pierdută a lui Apoloniu, *Despre locurile geometrice în plan.* Apoi Fermat și-a început propriile cercetări, pe care le-a notat în 1629, dar au fost publicate abia după 50 de ani, sub titlul *Introducere în locurile geometrice în plan și în spațiu.* Astfel, Fermat a descoperit avantajele reformulării noțiunilor de geometrie în termenii algebrei.

Locul geometric (în latină *locus*, plural *loci*) este un termen demodat astăzi, dar frecvent folosit chiar și prin 1960. El apare atunci când căutăm toate punctele din plan sau din spațiu care satisfac anumite condiții geometrice. De exemplu, putem căuta locul geometric al tuturor punctelor ale căror distanțe față de două puncte fixe însumate dau mereu aceeași valoare. Acesta se dovedește a fi o elipsă având cele două puncte drept focare. Această proprietate a elipsei era cunoscută de greci.



Coordonatele în abordarea lui Fermat

Fermat a observat un principiu general: când condițiile impuse punctului pot fi exprimate printr-o singură ecuație conținând două necunoscute, locul geometric corespunzător este o curbă – sau o linie dreaptă, pe care o considerăm un caz particular de curbă, pentru a evita diferențieri inutile. El a ilustrat acest principiu printr-o diagramă în care cele două cantități necunoscute A și E sunt reprezentate ca distanțe pe două direcții diferite.

Apoi a enumerat câteva tipuri particulare de ecuații care leagă A de E și a explicat ce curbe reprezintă ele. De pildă, dacă $A^2 = 1 + E^2$, locul geometric este o hiperbolă.

Fermat a introdus axele oblice în plan

În termeni moderni, Fermat a introdus axele oblice în plan (oblice însemnând că ele nu se intersectează neapărat în unghi drept). Variabilele A și E sunt cele două coordonate, pe care le vom numi x și y, ale oricărui punct dat față de aceste axe. Deci principiul lui Fermat afirmă că orice ecuație cu două coordonate variabile definește o curbă, iar exemplele lui ne arată ce tip de ecuație corespunde căruit tip de curbă, trasând curbele cunoscute încă din vremea grecilor.

Descartes

Noţiunea modernă de coordonate s-a împlinit în studiile lui Descartes. În viaţa de zi cu zi suntem obişnuiţi cu spaţii având două sau trei dimensiuni şi trebuie să facem un mare efort de imaginaţie ca să ne închipuim alte posibilităţi. Sistemul nostru vizual prezintă fiecărui ochi lumea exterioară ca o imagine bidimensională – ca pe un ecran de televizor. Imaginile uşor diferite provenind de la cei doi ochi sunt combinate de creier pentru a da senzaţia de profunzime, prin care percepem că lumea înconjurătoare are trei dimensiuni.

Cheia către spaţiile multidimensionale este ideea unui sistem de coordonate, care a fost introdus de Descartes într-un apendice, numit *La géometrie*, al cărţii sale *Discours de la méthode*. Ideea sa este că geometria plană poate fi reinterpretată în termenii algebrei. Abordarea sa este în esenţă aceeaşi cu cea a lui Fermat. Alegem un punct oarecare din plan, pe care îl numim origine. Trasăm două axe, care sunt drepte trecând prin origine şi formând un unghi drept. Una din axe este însemnată cu simbolul x, iar cealaltă cu simbolul y. Atunci orice punct P din plan e determinat de perechea de distanţe (x, y) care ne arată cât de departe este acel punct faţă de origine atunci când se măsoară paralel cu axele x şi respectiv y.

De exemplu, pe o hartă, x poate fi distanţa la est faţă de origine (numere negative reprezentând distanţele la vest), în timp ce y poate fi distanţa la nord faţă de origine (numere negative reprezentând distanţele la sud).

Coordonatele funcţionează şi în spaţiul tridimensional, dar acum nu ajung două numere pentru a localiza un punct, ci e nevoie de trei. Pe lângă distanţele est–vest şi nord–sud, trebuie să ştim cât de departe se află punctul deasupra sau dedesubtul originii. Folosim de regulă numere pozitive pentru distanţele de deasupra şi negative pentru distanţele de dedesubt. În spaţiu, coordonatele au forma (x, y, z).

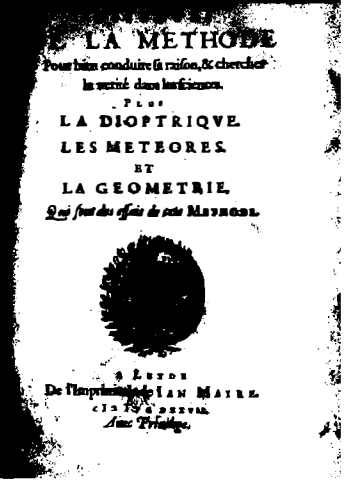
De aceea spunem că planul e bidimensional, iar spaţiul e tridimensional. Numărul *dimensiunilor* e dat de câte numere sunt necesare pentru a preciza un punct.

În spaţiul tridimensional, o singură ecuaţie în x, y şi z defineşte de obicei o suprafaţă. De exemplu, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ arată că punctul (x, y, z) se află întotdeauna la distanţa de 1 unitate faţă de origine, adică e situat pe sfera de rază 1 cu centrul în origine.

Observaţi că termenul „dimensiune“ nu este de fapt definit aici în sensul său propriu. Nu aflăm numărul dimensiunilor unui spaţiu găsind anumite lucruri pe

René Descartes

1596–1650



Descartes a început să studieze matematica în 1618, ca elev al savantului olandez Isaac Beeckman.
A părăsit Olanda pentru a călători prin Europa şi s-a înrolat în armata Bavariei în 1619. A continuat să călătorească între 1620 şi 1628, vizitând Boemia, Ungaria, Germania, Olanda, Franţa şi Italia.
L-a întâlnit pe Marsenne la Paris în 1622 şi a corespondat cu el constant după aceea, ceea ce l-a menţinut în contact cu majoritatea savanţilor de frunte ai epocii.

În 1628 Descartes s-a stabilit în Olanda şi şi-a început prima sa carte *Le Monde ou Traité de la Lumière* despre fizica luminii. Din prudenţă, publicarea ei a fost amânată atunci când Descartes a aflat de arestarea la domiciliu a lui Galileo Galilei.

Cartea a apărut abia după moartea sa şi într-o formă incompletă. În schimb, şi-a dezvoltat ideile asupra gândirii logice într-o lucrare importantă publicată în 1637: *Discours de la méthode*.
Cartea avea trei anexe: *La dioptrique*, *Les météores* şi *La géométrie*.

Cartea sa cea mai ambiţioasă, *Principia philosophiae*, a fost publicată în 1644. Era împărţită în patru părţi: *Principiile cunoaşterii umane*, *Principiile lucrurilor materiale*, *Lumea vizibilă* şi *Pământul*. Era o încercare de a oferi o bază matematică unificată pentru întregul univers fizic, reducând totul din natură la mecanică.

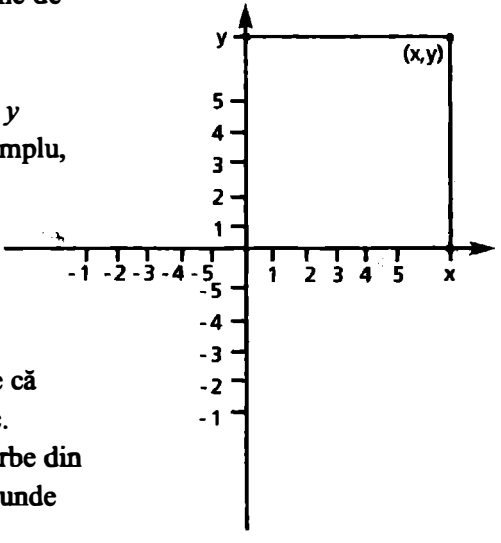
În 1649 Descartes a plecat în Suedia pentru a deveni profesorul reginei Cristina. Aceasta se trezea foarte devreme, în timp ce Descartes se trezea de obicei la ora 11. Faptul de a da lecţii de matematică reginei în fiecare dimineaţă la ora 5, într-un climat glacial, a pus la încercare sănătatea lui Descartes. După câteva luni, a murit de pneumonie.

care le numim dimensiuni şi apoi numărându-le. În schimb, determinăm *câte numere* sunt necesare pentru a preciza unde se află un anume loc în spaţiu, iar acela e numărul dimensiunilor.

UTILIZAREA ACTUALĂ A COORDONATELOR

Începuturile geometriei coordonatelor sunt mai uşor de înţeles dacă explicăm mai întâi cum funcţionează versiunea modernă. Există câteva variante, dar cea mai folosită începe prin trasarea a două drepte perpendiculare în plan, numite axe. Punctul lor de intersecţie este originea. Axele sunt dispuse în mod convenţional astfel încât una să fie orizontală, iar cealaltă verticală.

De-a lungul ambelor axe scriem numere întregi, cele negative avansând într-o direcţie, iar cele pozitive în cealaltă direcţie. Convenţional, axa orizontală se numeşte axa x, iar cea verticală axa y. Simbolurile x şi y sunt folosite pentru a reprezenta puncte pe aceste axe – distanţele faţă de origine. Un punct oarecare din plan, la distanţa x pe orizontală şi distanţa y pe verticală, este definit printr-o pereche de numere (x, y). Aceste numere sunt coordonatele acelui punct.



Orice ecuaţie care leagă pe x cu y limitează punctele posibile. De exemplu, dacă $x^2 + y^2 = 1$, atunci (x, y) trebuie să se afle la distanţa 1 faţă de origine, conform teoremei lui Pitagora. Asemenea puncte alcătuiesc un cerc. Se spune că $x^2 + y^2 = 1$ este *ecuaţia* acelui cerc. Fiecare ecuaţie corespunde unei curbe din plan; reciproc, fiecare curbă corespunde unei ecuaţii.

Coordonate carteziene

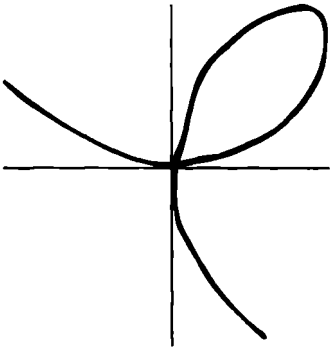
Geometria coordonatelor carteziene dezvăluie o unitate algebrică în spatele secţiunilor conice – curbele pe care grecii le construiseră ca secţiuni ale unui con dublu. Din punct de vedere algebric, secţiunile conice sunt cele mai simple curbe care urmează imediat după liniile drepte. O linie dreaptă corespunde unei ecuaţii liniare

$$ax + by + c = 0$$

cu *a, b, c* constante. O secțiune conică va corespunde unei ecuații pătratice

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

cu *a, b, c, d, e, f* constante. Descartes a afirmat acest lucru, dar nu a dat o demonstrație. A studiat însă un caz particular, bazându-se pe o teoremă datorată lui Pappus, care caracteriza secțiunile conice, și a arătat că în acest caz ecuația obținută este pătratică.



Foliul lui Descartes

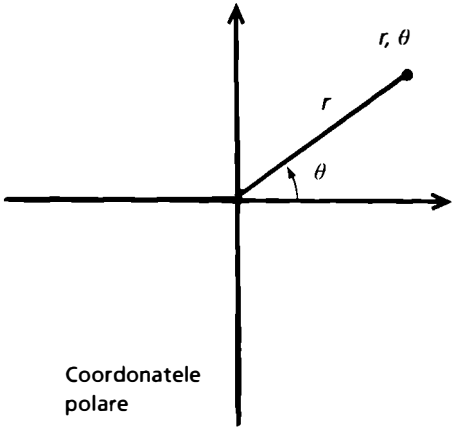
A continuat ocupându-se de ecuații de grad superior, definind curbe mai complexe decât majoritatea celor care apar în geometria clasică greacă. Un exemplu tipic este foliul lui Descartes, având ecuația

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

și care formează o buclă cu două capete tinzând spre infinit.

Poate cea mai importantă consecință a ideii de coordonate a fost că Descartes n-a mai privit curbele ca obiecte construite prin anumite mijloace geometrice, ci ca pe aspectul vizual al oricărei formule algebrice. După cum observa Isaac Newton în 1707, „mergând mult mai departe [decât grecii], moderniii au acceptat în geometrie toate liniile care pot fi exprimate prin ecuații".

Savanții au inventat apoi numeroase variații ale sistemului de coordonate cartezian. Într-o scrisoare din 1643, Fermat a preluat ideile lui Descartes și le-a extins la trei dimensiuni. Aici el menționează suprafețe precum elipsoizi și paraboloizi, determinate de ecuații pătratice cu trei variabile, *x, y, z*. O contribuție importantă a fost introducerea coordonatelor polare de către Jakob Bernoulli, în 1691. În locul unei perechi de axe, el a folosit un unghi θ și o distanță r pentru a determina punctele din plan, iar coordonatele devin (r, θ).

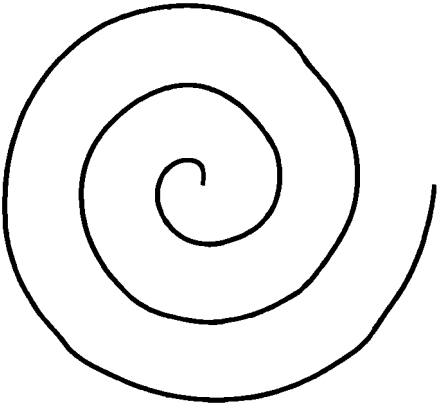


Coordonatele polare

Din nou, ecuațiile în aceste variabile definesc curbele, dar ecuații simple pot

defini acum curbe care în coordonate carteziene ar fi foarte complicate. De exemplu, ecuația $r = \theta$ corespunde unei spirale, numită *spirala lui Arhimede*.

Funcții

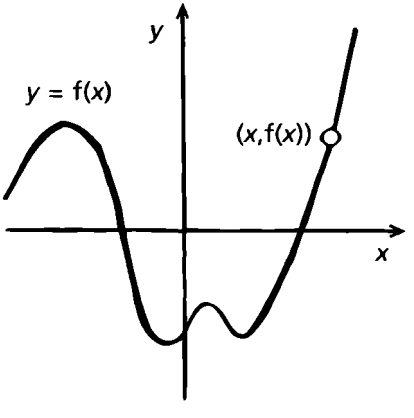


Spirala lui Arhimede

O aplicație importantă a coordonatelor în matematică este metoda de reprezentare grafică a funcțiilor.

O *funcție* nu e un număr, ci o rețetă care pornește de la un anumit număr și calculează un număr asociat. Rețeta apare deseori ca o formulă care asociază fiecărui număr x (eventual între anumite limite) un alt număr, $f(x)$.

De exemplu, funcția rădăcină pătrată e definită de regula $f(x) = \sqrt{x}$, adică „luați rădăcina pătrată a numărului dat". Această rețetă presupune ca x să fie pozitiv. În mod similar, funcția pătrat e definită de $f(x) = x^2$, iar de data asta nu există restricții pentru x.



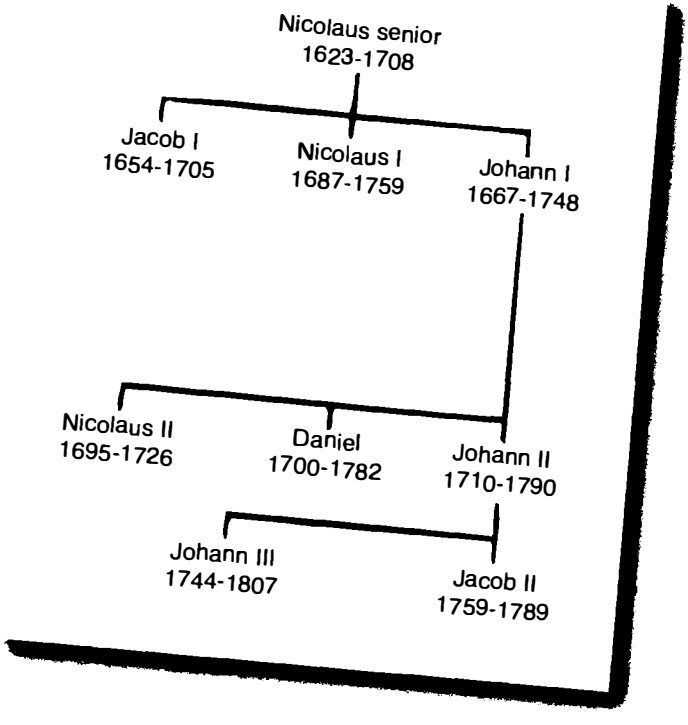
Graficul unei funcții f

Putem reprezenta geometric o funcție definind coordonata y, pentru o valoare dată a lui x, prin $y = f(x)$. Această ecuație stabilește o relație între cele două coordonate, iar astfel determină o curbă, numită *graficul* funcției f.

Graficul funcției $f(x) = x^2$ se dovedește a fi o parabolă. Cel al rădăcinii pătrate $f(x) = \sqrt{x}$ este o jumătate de parabolă, dar culcată. Funcții mai complicate conduc la curbe mai complicate. Graficul funcției sinus, $y = \sin x$, este o undă.

Ce a făcut fiecare Bernoulli?

Un catalog al familiei Bernoulli



Familia elveţiană Bernoulli a avut o imensă influenţă asupra dezvoltării matematicii. De-a lungul a patru generaţii, membrii ei au avut contribuţii importante atât în matematica pură, cât şi în cea aplicată. Prezentaţi adesea ca o mafie a matematicii, membrii familiei Bernoulli şi-au început carierele în drept, medicină sau teologie, pentru a deveni ulterior matematicieni profesionoşti sau amatori.

Multe noţiuni matematice poartă numele Bernoulli şi nu e vorba mereu de *acelaşi* Bernoulli. În locul unor detalii biografice, iată un rezumat a ce a făcut fiecare.

Jacob I (1654–1705)

Coordonatele polare, formula pentru raza de curbură a unei curbe plane. Curbe speciale, precum lănţişorul şi lemniscata. A demonstrat că o izocronă (o curbă de-a lungul căreia un corp va cădea cu o viteză verticală uniformă) este o cicloidă inversată.

S-a ocupat de figurile izoperimetrice, care au cea mai mică lungime în diferite condiţii, ceea ce va conduce mai târziu la calculul variaţiilor. Pionier al studiului probabilităţilor şi autor al primei cărţi cu acest subiect, *Ars Conjectandi*. A cerut să i se încrusteze pe piatra tombală o spirală

logaritmică, împreună cu inscripția *Eadem mutata resurgo* (Voi reveni același, și totuși schimbat).

Johann I (1667–1748)

A dezvoltat calculul diferențial și l-a promovat în Europa. Elevul său, marchizul de L'Hôpital, a inclus descoperirile lui Johann în primul manual de calcul diferențial. „Regula lui L'Hôpital" pentru evaluarea limitelor care se reduc la 0/0 i se datorează lui Johann. A scris despre optică (reflecția și refracția), traiectorii ortogonale ale familiilor de curbe, lungimea curbelor și evaluarea ariilor prin serii, trigonometrie analitică și funcția exponențială, brachistocronă (curba cu cea mai rapidă pantă), lungimea cicloidei.

Nicolaus I (1687–1759)

A ocupat catedra de matematică a lui Galileo la Padova. A scris despre geometrie și ecuații diferențiale. Ulterior a predat logica și dreptul. A fost un matematician înzestrat, dar nu foarte productiv. A corespondat cu Leibniz, Euler și alții – descoperirile sunt răspândite în 560 de documente de corespondență. A formulat Paradoxul St. Petersburg din teoria probabilităților.

A criticat folosirea abuzivă de către Euler a seriilor divergente. A supravegheat publicarea lucrării *Ars Conjectandi* a lui Jacob Bernoulli. L-a sprijinit pe Leibniz în disputa cu Newton.

Nicolaus II (1695 –1726)

A fost chemat la Academia din St. Petersburg și a murit înecat opt luni mai târziu. A discutat paradoxul St. Petersburg cu Daniel.

Daniel (1700–1726)

Este cel mai celebru dintre cei trei fii ai lui Johann. A lucrat în probabilități, astronomie, fizică și hidrodinamică. *Hidrodinamica* publicată de el în 1738 conține *principiul lui Bernoulli* privind relația dintre presiune și viteză. A scris despre maree, teoria cinetică a gazelor și vibrația corzilor. Pionier al studiului ecuațiilor cu derivate parțiale.

Johann II (1710–1790)

Era cel mai tânăr dintre cei trei fii ai lui Johann. A studiat dreptul, dar a devenit profesor de matematică la Basel. A lucrat în teoria matematică a căldurii și a luminii.

Johann III (1744–1807)

Asemenea tatălui său, a studiat dreptul, dar apoi s-a dedicat matematicii. A fost chemat la Academia din Berlin la vârsta de 19 ani. A scris despre astronomie, probabilități și zecimale recurente.

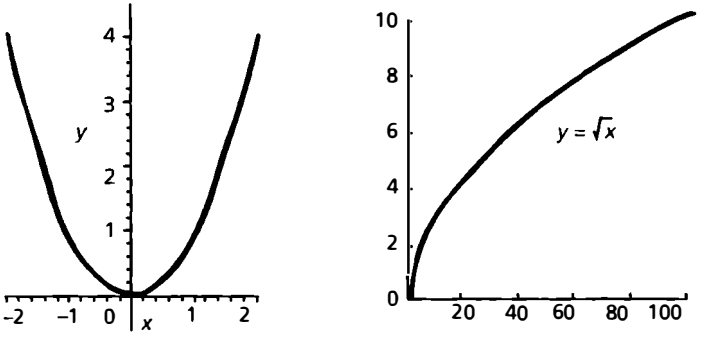
Jacob II (1759–1789)

Lucrări importante în elasticitate, hidrostatică și balistică.

Geometria coordonatelor în zilele noastre

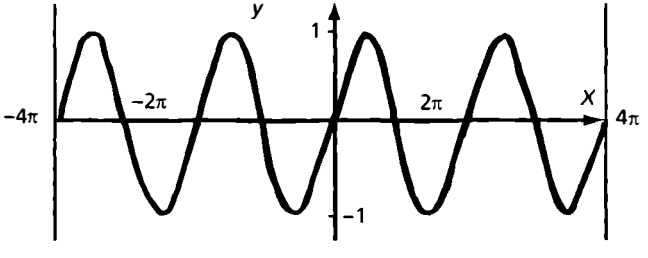
Coordonatele sunt una dintre acele idei simple care au influențat puternic viața de zi cu zi. Le folosim pretutindeni, de regulă fără să ne dăm seama. Practic toată grafica pe calculator folosește un sistem de coordonate intern, iar geometria care apare pe ecran e determinată algebric. O operație simplă cum e rotirea unei fotografii digitale cu câteva grade, pentru ca linia orizontului să fie la orizontală, se bazează pe geometria coordonatelor.

Sensul profund al geometriei coordonatelor ține de interconexiunile din matematică. Noțiuni ale căror transpuneri fizice par fără legătură între ele pot fi aspecte diferite ale aceluiași lucru.



Graficul ridicării la pătrat și al rădăcinii pătrate

Aparențele pot fi înșelătoare. Mare parte din eficacitatea matematicii ca mijloc de a înțelege universul provine din capacitatea ei de a adapta ideile, transferându-le dintr-un domeniu al științei în altul. Matematica e esențială în transferul de tehnologie. Interconexiunile pe care le-am descoperit în ultimii 4000 de ani fac din matematică un domeniu unic și unitar.



Graficul funcției sinus

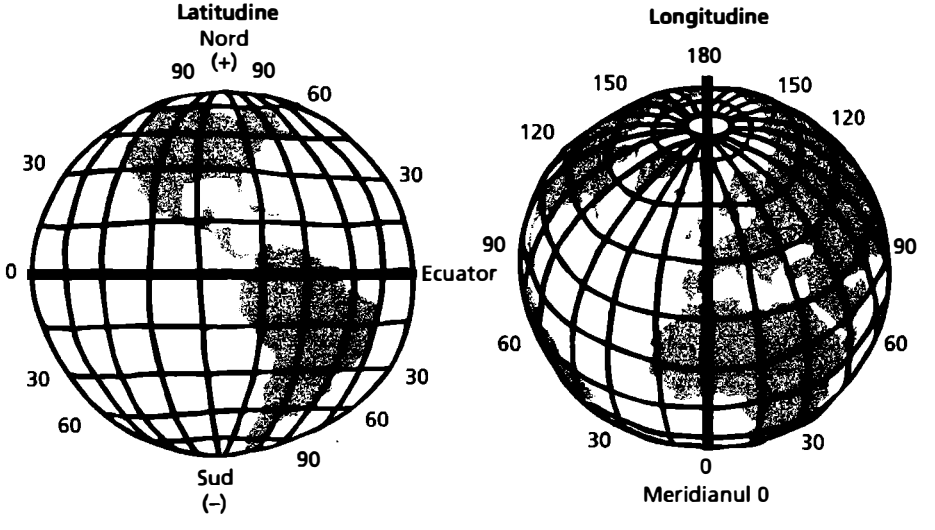
La ce i-au ajutat coordonatele

Geometria coordonatelor poate fi folosită pentru suprafețe mai complicate decât planul, cum ar fi sfera. Cele mai obișnuite coordonate de pe sferă sunt longitudinea și latitudinea. Astfel, cartografierea și folosirea hărților în navigație pot fi considerate aplicații ale geometriei coordonatelor.

Principala problemă de navigație a unui căpitan era determinarea latitudinii și longitudinii vasului său. Aflarea latitudinii e destul de ușoară, deoarece unghiul la care se află Soarele deasupra orizontului depinde de latitudine și poate fi tabelat. Din 1730, instrumentul standard pentru găsirea latitudinii a fost sextantul (pe care acum GPS-ul l-a scos din uz). Acesta a fost inventat de Newton, care însă nu l-a făcut public, și în mod independent de matematicianul englez John Hadley și de inventatorul american Thomas Godfrey. Navigatorii folosiseră înainte astrolabul, care provenea din Arabia medievală.

Longitudinea e mai greu de aflat. Problema a fost rezolvată în cele din urmă prin construirea unui ceas foarte precis, care era potrivit după ora locală la începutul călătoriei. Ora răsăritului și cea a apusului, precum și mișcările Lunii și ale stelelor depind de longitudine, făcând astfel posibilă determinarea longitudinii prin compararea orei locale cu cea indicată de ceas. Povestea inventării cronometrului de către John Harrison, care a rezolvat astfel problema, este relatată în cartea lui Dava Sobel *Longitudinea*.

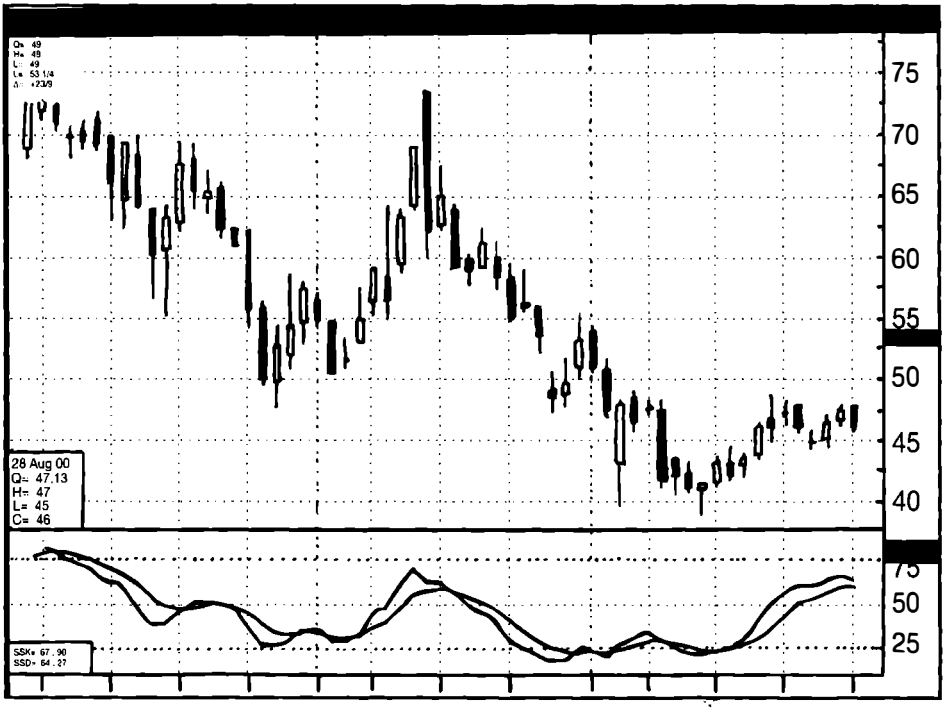
Longitudinea și latitudinea ca sistem de coordonate



La ce ne ajută coordonatele

Noi continuăm să folosim coordonatele pentru cartografiere, dar o altă aplicație obișnuită a geometriei coordonatelor se întâlnește la bursă, unde fluctuațiile unor prețuri sunt înregistrate sub forma unei curbe. Aici coordonata x e timpul, iar coordonata y prețul. Cantități uriașe de date științifice și financiare sunt înregistrate în acest fel.

Datele bursiere reprezentate în coordonate



7

Originile teoriei numerelor

Deși erau tot mai fascinați de geometrie, matematicienii nu şi-au pierdut interesul pentru numere. Dar au început să-şi pună întrebări mai profunde şi au răspuns la multe dintre ele. Câteva au trebuit să aştepte apariția unor tehnici mai puternice. Unele au rămas fără răspuns până în ziua de azi.

Teoria numerelor

Numerele au ceva fascinant. Numerele naturale 1, 2, 3, 4, 5..., ce poate fi mai simplu? Aici se ascund însă profunzimi nebănuite, iar multe dintre cele mai dificile întrebări din matematică se leagă de proprietăți aparent banale ale numerelor naturale. Acest domeniu se numeşte *teoria numerelor* şi este atât de dificil tocmai pentru că ingredientele lui sunt elementare. Simplitatea numerelor naturale lasă prea puțin loc tehnicilor elaborate.

Primele contribuții serioase la teoria numerelor – demonstrații, nu doar afirmații – se găsesc în lucrările lui Euclid, unde ideile apar sub formă geometrică. Subiectul a devenit un domeniu de sine stătător al matematicii grație lui Diofant, de la care s-au păstrat câteva cópii ale unor lucrări. Teoria numerelor a luat un mare avânt pe la 1600 datorită lui Fermat şi a fost dezvoltată de Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange şi Carl Friedrich Gauss, devenind o ramură a matematicii profundă şi vastă, care a influențat multe alte domenii, adesea aparent neînrudite. Pe la sfârşitul secolului XX, aceste conexiuni au fost folosite pentru a rezolva unele dintre vechile probleme, între care o celebră conjectură a lui Fermat de pe la 1650, cunoscută drept Marea lui teoremă.

În cea mai mare parte a istoriei sale, teoria numerelor s-a ocupat de structura internă a matematicii, fără prea multe legături cu lumea reală. Dacă a existat vreo ramură a matematicii care a trăit în donjoanele izolate ale turnurilor de fildeş, aceasta a fost teoria numerelor. Dar apariția calculatorului a schimbat lucrurile. Calculatoarele operează cu reprezentări electronice ale numerelor întregi, iar problemele şi perspectivele deschise de calculatoare au condus adesea la teoria numerelor. După 2500 de ani de exercițiu pur intelectual, teoria numerelor a avut în sfârşit un impact asupra vieții cotidiene.

Numerele prime

Oricine studiază înmulțirea numerelor întregi observă până la urmă o distincție fundamentală.

Multe numere pot fi descompuse în părți mai mici, adică numărul considerat apare prin înmulțirea acelor părți. De pildă, 10 este 2×5, iar 12 este 3×4. Unele numere nu pot fi însă descompuse în acest mod. Nu putem exprima numărul 11 ca produsul a două numere întregi mai mici; același lucru e valabil pentru 2, 3, 5, 7 și multe altele.

Numerele care pot fi exprimate ca produsul a două numere mai mici se numesc *compuse*. Cele care nu pot fi exprimate astfel sunt numere *prime*. După această definiție, numărul 1 trebuie considerat prim, dar, din motive întemeiate, este plasat într-o categorie aparte și numit unitate. Așadar, lista numerelor prime începe cu

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41

După cum sugerează această listă, nu există un tipar vizibil al numerelor prime (cu excepția faptului că toate, în afară de primul, sunt impare). Ele apar oarecum neregulat și nu există o modalitate simplă de a prevedea următorul număr de pe listă. Nu se pune problema ca acest număr să fie *determinat* în vreun fel – testăm pur și simplu numere succesive până găsim următorul număr prim.

În ciuda, sau poate tocmai datorită distribuției lor neregulate, numerele prime au o importanță vitală în matematică. Ele sunt cărămizile din care sunt construite toate numerele, în sensul că numerele mai mari se obțin prin înmulțirea celor mai mici. Chimia ne spune că orice moleculă, oricât de complicată, e alcătuită din atomi – particule de materie indivizibile din punct de vedere chimic. La fel, matematica ne spune că orice număr, oricât de mare, e alcătuit din numere prime – numere indivizibile. Numerele prime sunt deci atomii teoriei numerelor.

Ele sunt cărămizile din care sunt construite toate numerele

Această trăsătură a numerelor prime e utilă deoarece multe probleme din matematică pot fi rezolvate pentru toate numerele naturale, cu condiția să fie rezolvate pentru numerele prime, iar acestea au proprietăți speciale, care uneori fac ca rezolvarea problemei să fie mai ușoară. Acest aspect dual al numerelor prime – importante, dar dificile – stârnește curiozitatea matematicianului.

Euclid

Euclid a introdus numerele prime în Cartea VII a *Elementelor* şi a dat demonstraţii pentru trei proprietăţi-cheie. În terminologie modernă, acestea sunt:

(i) Fiecare număr poate fi exprimat ca un produs de numere prime.
(ii) Această expresie e unică, dacă ignorăm ordinea în care apar numerele prime.
(iii) Există o infinitate de numere prime.

Ce a afirmat şi ce a demonstrat Euclid sunt lucruri oarecum diferite.

Propoziţia 31, Cartea VII, ne spune că orice număr compus e măsurat de un anumit număr prim – adică poate fi împărţit exact la acel număr. Spre exemplu, 30 e compus şi e divizibil exact la câteva numere prime, între care 5, căci $30 = 6 \times 5$. Prin repetarea acestui proces de extragere a unui divizor prim, sau *factor*, putem descompune orice număr într-un produs de numere prime. Astfel, pornind de la $30 = 5 \times 6$, observăm că 6 este de asemenea compus, deoarece $6 = 2 \times 3$. Atunci $30 = 2 \times 3 \times 5$, unde toţi cei trei factori sunt numere prime.

Dacă în schimb am fi pornit de la $30 = 10 \times 3$, atunci l-am fi descompus pe 10 scriind $10 = 2 \times 5$, ceea ce duce la $30 = 2 \times 5 \times 3$. Apar aceleaşi trei numere prime, dar înmulţite într-o altă ordine – ceea ce, desigur, nu afectează rezultatul. Poate părea evident faptul că, oricum am descompune un număr în factori primi, obţinem totdeauna acelaşi rezultat, exceptând ordinea, dar aceasta se dovedeşte a fi dificil de demonstrat. De fapt, afirmaţii similare din anumite sisteme numerice înrudite s-au dovedit a fi *false*, dar pentru numerele întregi obişnuite afirmaţia e adevărată. Factorizarea numerelor prime e *unică*. Euclid a demonstrat un lucru esenţial, necesar pentru a stabili unicitatea, în Propoziţia 30 din Cartea VII a *Elementelor*: Dacă un număr prim divide produsul a două numere, atunci el trebuie să dividă cel puţin unul din acele numere. Odată ce cunoaştem Propoziţia 30, unicitatea factorizării numerelor prime e o consecinţă imediată.

În limbaj modern, şirul numerelor prime e infinit.

Propoziţia 20 din Cartea IX afirmă că: „Numerele prime sunt mai multe decât orice multitudine determinată de numere prime.“ În limbaj modern, asta înseamnă că şirul numerelor prime e infinit. Demonstraţia e dată pentru un caz reprezentativ: să presupunem că există doar trei numere prime, a, b şi c. Le înmulţim între ele, adunăm unu şi obţinem $abc + 1$. Acest număr trebuie să fie divizibil cu un număr prim, dar acela nu poate fi unul dintre cele trei iniţiale, deoarece ele divid numărul abc exact, astfel încât ele nu

DE CE UNICITATEA FACTORIZĂRII ÎN NUMERE PRIME NU E EVIDENTĂ

Din moment ce numerele prime sunt atomii teoriei numerelor, poate părea evident că *aceiaşi* atomi apar întodeauna atunci când un număr e descompus în factori primi. În fond, atomii sunt părţile indivizibile. Dacă ai descompus un număr în două feluri diferite nu înseamnă oare că ai spart un atom? Dar aici analogia cu chimia e înşelătoare.

Pentru a vedea că unicitatea factorizării în numere prime *nu* e evidentă, putem considera un şir particular de numere:

1 5 9 13 17 21 25 29

şi aşa mai departe. Acestea sunt numerele mai mari cu unu decât un multiplu al lui 4. Produsele acestor numere au şi ele aceeaşi proprietate, aşa încât le putem construi înmulţind numere mai mici de acelaşi tip. Definim un număr „cvasi-prim" drept orice număr din acest şir care nu e produsul a două numere mai mici *din şir*. De pildă, 9 e cvasi-prim: singurele numere mai mici din şir sunt 1 şi 5, iar produsul lor nu este 9. (E drept că $9 = 3 \times 3$, dar numărul 3 nu face parte din şir.)

Este evident – şi adevărat – că fiecare număr din şir este produsul unor numere cvasi-prime. Dar, deşi aceste cvasi-prime sunt atomii şirului, se întâmplă ceva straniu. Numărul 693 se poate descompune în două moduri diferite: $693 = 9 \times 77 = 21 \times 33$ şi toţi cei patru factori, 9, 21, 33 şi 77, sunt numere *cvasi-prime*. Astfel, unicitatea factorizării e falsă pentru acest tip de număr.

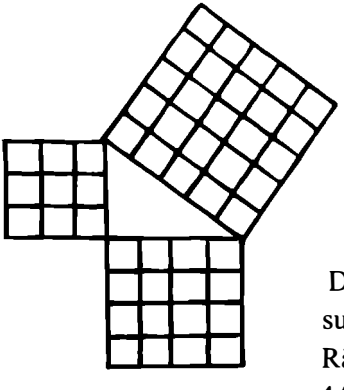
pot divide şi numărul $abc + 1$, fiindcă atunci ele ar divide şi diferenţa, care este 1. Prin urmare, am găsit un nou număr prim, ceea ce contrazice presupunerea că a, b, c sunt toate numerele prime care există.

Deşi demonstraţia lui Euclid foloseşte trei numere prime, ideea funcţionează şi pentru un şir mai lung. Înmulţim toate numerele prime din acest şir, adunăm unu şi apoi luăm un factor prim din acest rezultat; aceasta generează întotdeauna un număr prim care nu face parte din şir. De aceea niciodată un şir finit de numere prime nu poate fi complet.

CEL MAI MARE NUMĂR PRIM CUNOSCUT

Nu există un cel mai mare număr prim, dar cel mai mare număr prim *cunoscut* în septembrie 2009 era $2^{43\,122\,609} - 1$, care are 12 978 189 de cifre zecimale. Numerele de forma $2^p - 1$, cu p prim, se numesc numere prime Mersenne, deoarece, în *Cogitata Physica-Mathematica* din 1644, Mersenne a emis ipoteza că aceste numere sunt prime pentru $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ şi 257 şi compuse pentru orice alt număr întreg până la 257.

Există metode speciale de mare viteză pentru testarea unor asemenea numere spre a stabili dacă sunt prime, iar acum ştim că Mersenne a făcut cinci greşeli. Numerele sale sunt compuse atunci când $p = 67$ şi 257 şi există încă trei numere prime pentru $p = 61, 89, 107$. Se cunosc 44 de numere prime Mersenne. Descoperirea de noi numere prime Mersenne e un bun mijloc de a testa noile supercalculatoare, dar nu are importanţă practică.



Triunghiul dreptunghic cu laturile 3-4-5

Diofant

L-am menţionat pe Diofant din Alexandria în legătură cu notaţia algebrică, dar contribuţia sa cea mai importantă a fost în teoria numerelor. Diofant a studiat probleme generale, nu particulare, deşi *răspunsurile* lui erau numere bine determinate. De exemplu: „Găsiţi trei numere aşa încât suma lor şi suma oricăror două dintre ele să fie pătrat perfect." Răspunsul lui este 41, 80 şi 320. Suma celor trei este $441 = 21^2$. Suma perechilor este $41 + 80 = 11^2$, $41 + 320 = 19^2$ şi $80 + 320 = 20^2$.

Una dintre cele mai cunoscute ecuaţii rezolvate de Diofant este o ciudată consecinţă a Teoremei lui Pitagora. Putem exprima teorema algebric: dacă un triunghi dreptunghic are laturile a, b, c, unde c este cea mai mare, atunci $a^2 + b^2 = c^2$. Există anumite triunghiuri dreptunghice pentru care laturile sunt numere întregi. Cel mai simplu şi mai cunoscut este acela cu a, b, c având valorile 3, 4 şi respectiv 5; atunci $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Un alt exemplu, următorul ca simplitate, este $5^2 + 12^2 = 13^2$.

În fapt există o infinitate de asemenea triplete pitagoreice. Diofant a descoperit toate posibilele soluţii în numere întregi a ceea ce în prezent exprimăm prin ecuaţia $a^2 + b^2 = c^2$. Reţeta sa este de a lua orice două numere

CE NU ŞTIM DESPRE NUMERELE PRIME

Numerele prime au şi în zilele noastre secrete. Două celebre probleme nerezolvate sunt Conjectura lui Goldbach şi Conjectura numerelor prime gemene.

Christian Goldbach a fost un matematician amator care coresponda regulat cu Euler. Într-o scrisoare din 1742, el susţinea că orice număr prim mai mare decât 2 este suma a trei numere prime. Goldbach considera numărul 1 drept prim, ceea ce nu mai e valabil acum; prin urmare, noi excludem numerele $3 = 1 + 1 + 1$ şi $4 = 2 + 1 + 1$. Euler a propus o conjectură mai puternică: aceea că fiecare număr par mai mare decât 2 este suma a două numere prime. De pildă, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 5 + 5$ etc. Din această conjectură rezultă cea a lui Goldbach. Euler credea în adevărul conjecturii sale, dar ea n-a fost demonstrată nici în zilele noastre. Experimentele pe calculator au arătat că e adevărată pentru orice număr până la 10^{18}. Cel mai bun rezultat cunoscut până acum a fost obţinut de Chen Jing-Run, în 1973, folosind tehnici complicate de analiză matematică. El a demonstrat că orice număr par suficient de mare este suma a două numere prime sau a unui număr prim şi a unuia aproape prim (produsul a două numere prime).

Conjectura numerelor prime gemene e mult mai veche, de pe vremea lui Euclid. Ea afirmă că există o infinitate de numere *prime gemene* p şi $p + 2$. Exemple de numere prime gemene sunt 5, 7 şi 11, 13. Nici în acest caz nu s-a găsit o demonstraţie. În 1966, Chen a demonstrat că există o infinitate de numere prime p, astfel încât $p + 2$ să fie prim sau aproape prim. Cele mai mari numere prime gemene cunoscute în prezent sunt $2\,003\,663\,613 \times 2^{195\,000} \pm 1$ descoperite de Eric Vautier, Patrick Mc Kibbon şi Dmitri Gribenko în 2007.

întregi şi de a forma diferenţa dintre pătratele lor, dublul produsului lor şi suma pătratelor lor. Aceste trei numere alcătuiesc întotdeauna o tripletă pitagoreică, iar toate triunghiurile de acest tip apar în felul acesta, dacă admitem înmulţirea celor trei numere cu o constantă. De pildă, dacă numerele sunt 1 şi 2, obţinem faimosul triunghi 3-4-5. În particular, deoarece există o infinitate de moduri de a alege cele două numere, există o infinitate de triplete pitagoreice.

Fermat

După Diofant, teoria numerelor a stagnat vreme de peste o mie de ani, până la apariţia lui Fermat, care a făcut multe descoperiri importante. Una dintre teoremele sale cele mai elegante ne spune când anume un număr întreg n este

suma a două pătrate perfecte: $n = a^2 + b^2$. Soluția e cea mai simplă dacă n e număr prim. Fermat a observat că există trei tipuri de numere prime:

(i) Numărul 2, singurul număr prim par.
(ii) Numerele prime care sunt cu 1 mai mari decât un multiplu al lui 4, precum 5, 13, 17 etc. – iar aceste numere prime sunt toate impare.
(iii) Numerele prime care sunt mai mici cu 1 decât un multiplu al lui 4, precum 3, 7, 11 etc. – iar acestea sunt de asemenea impare.

El a demonstrat că un număr prim este suma a două pătrate dacă aparține categoriilor (i) sau (ii) și nu este suma a două pătrate dacă aparține categoriei (iii).

De pildă, 37 aparține categoriei (ii), fiind $4 \times 9 + 1$, iar $37 = 6^2 + 1^2$, suma a două pătrate. Dimpotrivă, $31 = 4 \times 8 - 1$ este din categoria (iii) și, dacă încerci toate căile de a-l scrie pe 31 ca sumă a două pătrate, constați că e imposibil. (De exemplu, $31 = 25 + 6$; 25 este pătrat, dar 6 nu este).

Prin urmare, un număr e suma a două pătrate dacă și numai dacă toți divizorii săi primi de forma $4k - 1$ apar la o putere pară. Folosind metode similare, Joseph-Louis Lagrange a demonstrat în 1770 că orice întreg pozitiv este suma a patru pătrate perfecte (incluzând unul sau doi de 0, dacă e nevoie). Fermat prevăzuse acest fapt, fără să fi lăsat vreo demonstrație.

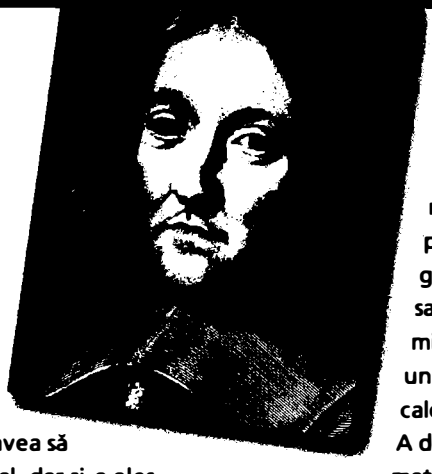
Una dintre cele mai importante descoperiri ale lui Fermat este și dintre cele mai simple. Este cunoscută drept Mica Teoremă a lui Fermat, spre a nu se confunda cu Marea sa Teoremă, și afirmă că, dacă p este un număr prim oarecare, iar a este un număr întreg oarecare, atunci $a^p - a$ este multiplu al lui p. Dacă p este compus, în general propoziția e falsă, dar nu întotdeauna.

Cea mai cunoscută descoperire a lui Fermat a fost demonstrată abia după 350 de ani. El a formulat-o în 1640 și a pretins că ar avea o demonstrație, dar tot ce ne-a rămas este o scurtă notă. Fermat deținea o copie a *Aritmeticii* lui Diofant, care i-a inspirat multe dintre cercetări, și adesea își nota ideile pe marginea paginilor ei. La un moment dat trebuie să se fi gândit la ecuația pitagoreică: se adună două pătrate pentru a se obține un pătrat. El s-a întrebat ce s-ar întâmpla dacă în loc de pătrate s-ar aduna cuburi, dar nu a găsit o demonstrație. Aceeași problemă a apărut și pentru puterea a patra, a cincea sau una mai mare.

În 1670, fiul lui Fermat, Samuel, a publicat o ediție a traducerii lui Bachet a *Aritmeticii*, care includea însemnările lui Fermat. Una dintre ele a devenit celebră: afirmația că, dacă $n \geq 3$, suma a două numere la puterea n nu este niciodată un număr la puterea n. În această notă se spune: „Descompunerea

Pierre de Fermat

1601–1665



Pierre Fermat s-a născut în Franța, la Beaumont-de-Lomagne, în 1601, ca fiu al negustorului de piei Dominique Fermat și al Clairei de Long, fiica unui avocat. La 1629 făcuse deja descoperiri importante în geometrie și în ceea ce avea să devină calculul diferențial, dar și-a ales drept carieră dreptul, devenind în 1631 consilier al parlamentului din Toulouse. Aceasta i-a permis să adauge particula „de" la numele său. O epidemie de ciumă i-a omorât superiorii, iar astfel a avansat ierarhic rapid. În 1648 a devenit consilier al regelui în parlamentul local din Toulouse, unde a activat tot restul vieții, atingând în 1652 cel mai înalt rang în tribunalul penal.

Nu a deținut niciodată un post universitar, dar matematica a fost pasiunea lui. În 1653 s-a îmbolnăvit de ciumă și s-a zvonit că a murit, dar a supraviețuit. A susținut o vastă corespondență cu alți savanți, în special cu matematicianul Pierre de Carcavi și călugărul Marin Mersenne.

S-a ocupat de mecanică, optică, teoria probabilităților și geometrie, iar metoda sa de aflare a valorilor minimă și maximă ale unei funcții a deschis calea analizei matematice. A devenit unul dintre matematicienii de frunte ai lumii, dar a publicat foarte puțin din descoperirile sale, mai ales pentru că nu voia să piardă timpul cu redactarea.

Influența sa cea mai durabilă a fost în teoria numerelor, unde i-a provocat pe alți matematicieni să demonstreze o serie de teoreme și să rezolve diferite probleme. Între acestea se află ecuația (greșit numită) Pell $nx^2 + 1 = y^2$ și afirmația că suma a două cuburi perfecte, diferite de zero, nu poate fi un cub perfect. Acesta e un caz particular al unei conjecturi mai generale, numită „Marea Teoremă a lui Fermat", unde cubul e înlocuit cu puterea a n-a pentru orice $n \geq 3$.

A murit în 1665, la numai două zile după încheierea unui proces.

unui cub în suma a două cuburi, a unei puteri a patra în două puteri a patra sau, în general, a oricărei puteri mai mari de doi în două puteri de același fel este imposibilă; am găsit o demonstrație remarcabilă a acestui fapt. Marginea paginii e prea mică pentru a încăpea aici."

E puțin probabil ca demonstrația, dacă a existat, să fi fost corectă. Prima și, deocamdată, singura demonstrație a fost dată de Andrew Wiles în 1994; ea folosește metode abstracte apărute abia la sfârșitul secolului XX.

După Fermat, mai mulți mari matematicieni, între care Euler și Lagrange, au lucrat în teoria numerelor. Majoritatea teoremelor formulate de Fermat, dar nedemonstrate, au fost definitivate în această perioadă.

Gauss

Următorul pas important în teoria numerelor a fost făcut de Gauss, care și-a publicat capodopera, *Disquisitiones arithmeticae* (*Cercetări aritmetice*) în 1801. Această carte a propulsat teoria numerelor în centrul scenei matematicii. Gauss s-a concentrat mai ales asupra propriilor sale studii, dar a pus de asemenea bazele teoriei numerelor și a sistematizat ideile predecesorilor săi.

Cea mai importantă descoperire a fost o idee simplă, dar foarte puternică: *aritmetica modulară*. Gauss a găsit un nou tip de sistem numeric, analog numerelor întregi, dar diferit într-o privință esențială: un anumit număr, numit *modul*, a fost identificat cu numărul zero. Această idee ciudată s-a dovedit a fi fundamentală în înțelegerea proprietăților de divizibilitate a numerelor întregi obișnuite.

Iată ideea lui Gauss. Fiind dat un număr întreg m, spunem că a și b sunt *congruente modulo* m și scriem

$$a \equiv b (\text{mod } m)$$

dacă diferența $a - b$ este exact divizibilă cu m. Aritmetica modulului m funcționează exact la fel ca aritmetica obișnuită, cu deosebirea că m poate fi înlocuit oriunde în calcule cu 0. Astfel, orice multiplu al lui m poate fi ignorat.

Expresia „aritmetica ceasului" e folosită adesea pentru a lămuri ideea lui Gauss. Pe cadranul unui ceas, cifra 12 e efectiv aceeași cu 0, pentru că orele se repetă după 12 pași (24 în Europa continentală și în activitățile militare). La șapte ore după ora 6 nu este ora 13, ci ora 1, iar în sistemul lui Gauss $13 \equiv 1$ (mod 12). Astfel, aritmetica modulară e ca un ceas al cărui cerc întreg e parcurs în m ore. Evident, aritmetica modulară apare acolo unde matematicienii cercetează lucruri care se transformă în cicluri repetitive.

Disquisitiones arithmeticae folosea aritmetica modulară ca bază pentru idei mai profunde, dintre care menționăm trei.

Cartea este, în cea mai mare parte, o extindere a observațiilor lui Fermat că numerele prime de forma $4k + 1$ sunt suma a două pătrate, iar cele de forma

$4k - 1$ nu sunt. Gauss a reformulat acest rezultat ca o caracterizare a întregilor care pot fi scrişi sub forma $x^2 + y^2$, unde x şi y sunt întregi. Apoi s-a întrebat ce se întâmplă dacă în locul acestei formule folosim o *formă pătratică* generală, $ax^2 + bxy + cy^2$. Teoremele sale sunt prea tehnice pentru a fi prezentate, dar el a ajuns la o înţelegere aproape totală a problemei.

Un alt subiect este legea reciprocităţii pătratice, care l-a intrigat pe Gauss timp de mulţi ani. Punctul de pornire este o întrebare simplă: cum arată pătratele perfecte în raport cu un modul dat? De exemplu, să presupunem că modulul este 11. Atunci, posibilele pătrate perfecte (ale numerelor mai mici decât 11) sunt

$$0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad 49 \quad 64 \quad 81 \quad 100$$

care, dacă sunt reduse (mod 11), devin

$$0 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 9$$

cu fiecare număr diferit de 0 apărând de două ori. Aceste numere sunt *reziduurile pătratice* modulo 11.

Cheia problemei e considerarea numerelor prime. Dacă p şi q sunt numere prime, atunci când va fi q un pătrat (mod p)? Gauss a descoperit că deşi nu există o cale simplă de a da un răspuns direct, întrebarea se leagă de o alta: când este p un pătrat (mod q)? De exemplu, şirul reziduurilor pătratice de mai sus ne arată că $q = 5$ este un pătrat modulo $p \equiv 11$. Este de asemenea adevărat că 11 este un pătrat modulo 5 – deoarece $11 \equiv 1 \pmod 5$ şi $1 \equiv 1^2$. Astfel încât, în acest caz, ambele întrebări au acelaşi răspuns.

Gauss a demonstrat că această lege a reciprocităţii rămâne valabilă pentru orice pereche de numere prime impare, cu excepţia cazului în care ambele au forma $4k - 1$, iar atunci cele două întrebări au întotdeauna răspunsuri opuse. Astfel: pentru orice numere prime impare p şi q,

q este un pătrat (mod p) dacă şi numai dacă p este un pătrat (mod q),

exceptând cazul când p şi q sunt ambii de forma $4k - 1$, caz în care

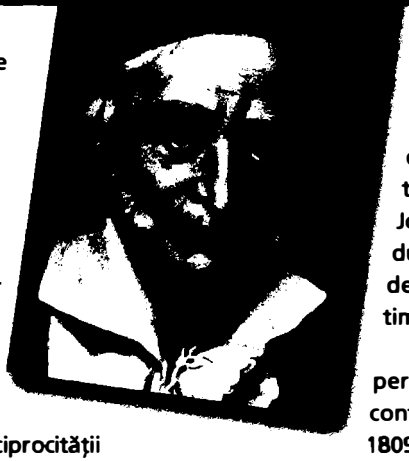
q este un pătrat (mod p) dacă şi numai dacă p nu este un pătrat (mod q).

Gauss nu ştia că această observaţie nu era nouă: Euler remarcase aceeaşi structură. Dar, spre deosebire de Euler, Gauss a reuşit să demonstreze că ea rămânea mereu valabilă. Demonstraţia a fost foarte dificilă, iar lui Gauss i-au trebuit câţiva ani pentru a face un pas mic, dar crucial.

Al treilea subiect din *Disquisitiones* e descoperirea care îl convinsese pe Gauss să devină matematician la vârsta de 19 ani: o construcţie geometrică pentru

Carl Friedrich Gauss

1777–1855



Gauss a fost deosebit de precoce, corectându-l la aritmetică pe tatăl său pe când avea doar trei ani. În 1792, Gauss s-a dus la Collegium Carolinum din Brunswick, cu sprijinul financiar al ducelui de Brunswick-Wolfenbüttel. Acolo a făcut câteva descoperiri matematice majore, între care legea reciprocității pătratice și teorema numerelor prime, fără însă a le demonstra. În 1795–1798 a studiat la Göttingen, unde a descoperit cum să construiască un poligon regulat cu 17 laturi folosind rigla și compasul. Cartea sa *Disquisitiones arithmeticae*, cea mai importantă lucrare de teoria numerelor scrisă până în ziua de azi, a fost publicată în 1801.

Reputația publică a lui Gauss s-a datorat însă unei predicții în domeniul astronomiei. Giuseppe Piazzi a descoperit în 1801 primul asteroid: Ceres. Observațiile lui erau atât de sumare, încât astronomii erau îngrijorați că nu-l vor mai găsi atunci când va reapărea din spatele Soarelui. Câțiva astronomi au prezis unde va reapărea, ceea ce a făcut și Gauss. Doar Gauss a avut dreptate. De fapt, Gauss a folosit o metodă inventată de el însuși, numită acum „metoda celor mai mici pătrate", pentru a obține rezultate precise din observații limitate. La acel moment nu și-a dezvăluit tehnica, dar între timp a devenit esențială în statistică și în prelucrarea datelor.

În 1805 Gauss s-a căsătorit cu Johanna Ostoff, pe care a iubit-o mult, și în 1807 a părăsit Brunswickul pentru a deveni directorul Observatorului din Göttingen. În 1808 tatăl său a murit, iar Johanna a murit în 1809, după ce a dat naștere celui de-al doilea fiu. La scurt timp, a murit și fiul.

În ciuda acestor tragedii personale, Gauss și-a continuat cercetările, și în 1809 a publicat *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, o contribuție importantă la mecanica cerească. S-a căsătorit cu Minna, o prietenă apropiată a Johannei, dar căsătoria a fost mai mult din interes decât din dragoste.

Pe la 1816, Gauss a scris o lucrare despre deducerea axiomei paralelelor din celelalte axiome ale lui Euclid, din care reiese că încă de la 1800 întrevedea posibilitatea unei geometrii logic coerente diferită de cea a lui Euclid.

În 1818 a fost însărcinat cu topografierea Hanovrei, aducând contribuții importante la metodele topografice. În 1831, după moartea Minnei, Gauss a început să studieze împreună cu fizicianul Wilhelm Weber câmpul magnetic al Pământului.

Ei au descoperit ceea ce numim acum Legile lui Kirchhoff pentru circuitele electrice și au construit un telegraf rudimentar. Când Weber a fost obligat să părăsească Göttingenul în 1837, activitatea științifică a lui Gauss a intrat în declin, deși el și-a menținut interesul pentru lucrările altora, în special ale lui Ferdinand Eisenstein și Georg Bernhard Riemann. A murit liniștit, în timpul somnului.

poligonul regulat cu 17 laturi. Euclid prezentase construcția, cu rigla și compasul, pentru poligoanele regulate cu 3, 5 și 15 laturi; el știa de asemenea că aceste numere se puteau dubla succesiv prin trasarea bisectoarelor, obținându-se poligoane regulate cu 4, 6, 8 și 10 laturi, și așa mai departe. Dar Euclid nu dăduse nici o construcție pentru poligoanele cu 7 laturi, 9 laturi sau orice alt număr în afara celor de mai sus. Timp de două mii de ani lumea matematică a crezut că Euclid rostise ultimul cuvânt și nici un alt poligon nu putea fi construit. Gauss a demonstrat contrarul.

E ușor de văzut că principala problemă este construirea poligoanelor regulate cu p laturi atunci când p este număr prim. Gauss a arătat că o asemenea construcție e echivalentă cu rezolvarea ecuației algebrice

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$$

O construcție cu rigla și compasul poate fi privită, grație geometriei coordonatelor, ca un șir de ecuații pătratice. Dacă o asemenea construcție există, rezultă (pe o cale nu tocmai simplă) că $p - 1$ trebuie să fie o putere a lui 2.

Lumea matematică a crezut că Euclid rostise ultimul cuvânt. Gauss a demonstrat contrarul.

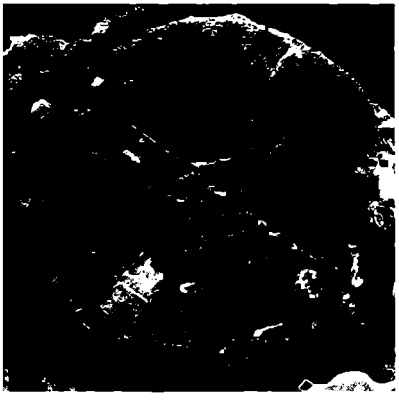
Cazurile grecești $p = 3$ și 5 satisfac condiția: $p - 1 = 2$ și respectiv 4. Dar nu sunt singurele numere prime de acest fel. Spre exemplu, $17 - 1 = 16$ este o putere a lui 2. Asta nu demonstrează că poligonul cu 17 laturi poate fi construit, dar dă o indicație, iar Gauss a reușit să găsească o reducție explicită a ecuației sale de gradul 16 la o serie de ecuații pătratice. El a afirmat, fără să demonstreze, că o construcție este posibilă dacă $p - 1$ e o putere a lui 2 (cu condiția ca p să fie prim) și este imposibilă pentru toate celelalte numere prime. Demonstrația a fost completată curând de alții.

Aceste numere prime speciale se numesc numere prime Fermat, deoarece au fost studiate de Fermat. El a observat că dacă p este prim și $p - 1 = 2^k$, atunci k trebuie să fie o putere a lui 2. A cercetat primele câteva numere prime Fermat: 2, 3, 5, 17, 257, 65 537. A emis ipoteza că numerele de forma $2^{2^m} + 1$ sunt întotdeauna prime, dar afirmația era falsă. Euler a descoperit că pentru $m = 5$ există un divizor: 641.

De aici rezultă că trebuie să mai existe construcții cu rigla și compasul pentru poligoanele regulate cu 257 și 65 537 de laturi. F.J. Richelot a construit poligonul cu 257 de laturi în 1832, iar construcția lui e corectă. J. Hermes a petrecut zece ani lucrând la poligonul cu 65 537 de laturi, a cărui construcție a încheiat-o în 1897, dar studii recente sugerează că s-ar fi strecurat erori.

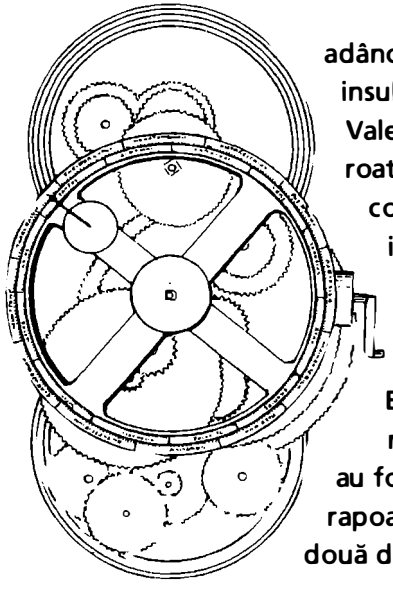
La ce i-a ajutat teoria numerelor

Una dintre primele aplicații practice ale teoriei numerelor apare la angrenaje. Dacă două roți sunt alăturate așa încât dinții lor să se angreneze, iar una are *m* dinți și cealaltă *n* dinți, atunci mișcarea lor este legată de aceste numere. Să presupunem, de exemplu, că una din roți are 30 de dinți, iar cealaltă 7. Dacă roata mare descrie o rotație completă, ce va face roata mică? Ea revine la poziția inițială după 7, 14, 21 și 28 de pași. Cei doi pași finali, pentru a ajunge la 30, o fac astfel să avanseze cu exact 2 pași. Acest număr apare deoarece el este restul împărțirii lui 30 la 7. Așadar mișcarea roților dințate este o reprezentare mecanică a împărțirii cu rest, iar aceasta este baza aritmeticii modulare.



O reconstrucție a mecanismului din Antikythera

Roțile dințate au fost folosite de meșteșugarii Greciei antice pentru a proiecta un dispozitiv remarcabil, mecanismul din Antikythera. În 1900 scufundătorul Elias Stadiatis a descoperit o bucată informă și corodată de rocă într-o epavă din anul 65 î.Cr., la o adâncime de vreo 40 de metri în apropierea insulei grecești Antikythera. În 1902 arheologul Valerios Stais a observat că roca conținea o roată dințată care era de fapt rămășița unui complicat mecanism de bronz. Avea inscripții în alfabetul grecesc.



Funcția mecanismului a fost dedusă din structura și inscripțiile sale și el s-a dovedit a fi un calculator astronomic. Există peste 30 de roți – cea mai recentă reconstituire, din 2006, sugerează că inițial au fost 37. Numărul roților corespunde unor rapoarte astronomice importante. În particular, două dintre ele au 53 de dinți – un număr dificil

La ce i-a ajutat teoria numerelor

de manufacturat –, iar acest număr provine din viteza cu care se rotește punctul de pe Lună cel mai depărtat de Pământ. Toți factorii primi ai numerelor de dinți se bazează pe două cicluri astronomice clasice, ciclul metonic și ciclul Saros. Analiza cu raze X a dezvăluit noi inscripții, iar acum e cert că dispozitivul era folosit pentru a prezice pozițiile Soarelui, Lunii și planetelor cunoscute pe atunci. Inscripțiile datează de pe la 150–100 î.Cr.

Mecanismul din Antikythera are un plan sofisticat și pare să încorporeze teoria lui Hiparh privind mișcarea Lunii. E posibil să fi fost construit de unul dintre elevii lui, sau cel puțin cu ajutorul lor. A fost probabil o jucărie destinată unui personaj regal, și nu un instrument practic, ceea ce ar explica finețea execuției.

Teoria numerelor a început să devină matematic interesantă odată cu studiile lui Fermat, care a identificat multe dintre tiparele ascunse în comportamentul straniu al numerelor întregi. Neplăcutul lui obicei de a nu da demonstrații a fost corectat de Euler, Lagrange și alte figuri mai puțin proeminente, singura excepție rămânând Marea sa Teoremă, dar teoria numerelor părea să constea în teoreme izolate – adesea profunde și dificile, însă fără legătură între ele.

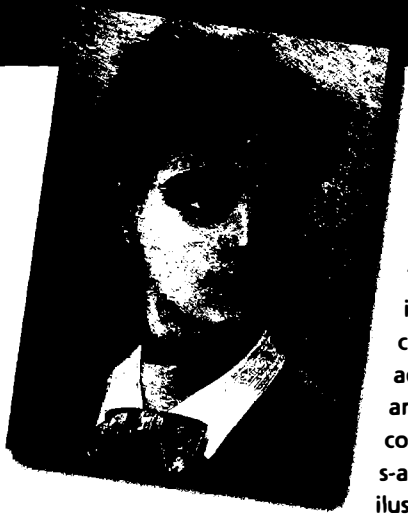
Totul s-a schimbat când Gauss a creat bazele conceptuale ale teoriei numerelor, de pildă aritmetica modulară. El a legat teoria numerelor de geometrie prin cercetările sale asupra poligoanelor regulate. De atunci, teoria numerelor a devenit un fir important în tapiseria matematicii.

Descoperirile lui Gauss au dus la recunoașterea unor noi tipuri de structuri în matematică – noi sisteme de numere, cum ar fi cel al întregilor modulo n, precum și noi operații, cum ar fi compunerea formelor pătratice. Privind înapoi, teoria numerelor de la sfârșitul secolului XVIII și începutul secolului XIX a condus către algebra abstractă de la sfârșitul secolului XIX și din secolul XX. Matematicienii au început să lărgească gama noțiunilor și structurilor cu care operau. În ciuda subiectului ei specializat, *Disquisitiones arithmeticae* marchează un moment de răscruce în dezvoltarea perspectivei moderne asupra matematicii în ansamblul ei. Acesta e unul dintre motivele pentru care Gauss e atât de prețuit de matematicieni.

Până la sfârșitul secolului XX teoria numerelor a rămas o ramură a matematicii pure – interesantă în sine și pentru numeroasele sale aplicații în

Marie-Sophie Germain

1776–1831



Sophie Germain era fiica negustorului de mătase Ambroise François Germain şi a Mariei Madelaine Germain. La vârsta de 13 ani a citit despre moartea lui Arhimede, ucis de un soldat roman în timp ce medita asupra unei figuri geometrice trasate pe nisip, şi i-a venit ideea să devină matematiciană. În ciuda eforturilor bine intenţionate ale părinţilor de a o face să-şi schimbe hotărârea – matematica nu era considerată o carieră potrivită pentru o tânără doamnă –, a citit pe sub pătură lucrările lui Newton şi Euler, în timp ce mama şi tatăl ei dormeau. Când părinţii s-au convins de pasiunea ei pentru matematică, s-au îndulcoşat şi au început s-o ajute, oferindu-i sprijin financiar de-a lungul întregii vieţi. Ea a obţinut notele de curs de la École Polytechnique şi i-a trimis lui Lagrange o lucrare proprie sub numele de „Monsieur LeBlanc". Lagrange a fost impresionat să descopere că autorul era o femeie şi a încurajat-o. Cei doi au lucrat împreună, iar unele dintre descoperirile ei au fost incluse într-o ediţie ulterioară a cărţii lui Legendre din 1798 despre teoria numerelor.

Cel mai celebru corespondent al ei a fost Gauss. Sophie a studiat *Disquisitiones arithmeticae* şi în perioada 1804–1809 i-a trimis autorului o serie de scrisori, ascunzându-şi iar genul sub numele LeBlanc. Gauss a lăudat lucrările lui LeBlanc în scrisorile adresate altor matematicieni. În 1806, când francezii au ocupat Braunschweigul, el a descoperit că LeBlanc era de fapt femeie. Îngrijorată că Gauss ar putea avea aceeaşi soartă ca Arhimede, Sophie a luat legătura cu un prieten de familie, generalul Pernety. Gauss a aflat de intervenţia ei, descoperind astfel că LeBlanc era Sophie.

Sophie n-avea motive de îngrijorare. Gauss a fost foarte impresionat şi i-a scris: „N-am cuvinte ca să vă descriu admiraţia şi uimirea mea când am văzut cum stimatul meu corespondent, domnul LeBlanc, s-a transformat în acest personaj ilustru... Atunci când o persoană aparţinând sexului care, după obiceiurile şi prejudecăţile noastre, trebuie să întâmpine infinit mai multe dificultăţi decât bărbaţii pentru a se familiariza cu aceste probleme spinoase, reuşeşte totuşi să depăşească aceste obstacole şi să străpungă cele mai obscure zone ale lor, atunci fără îndoială trebuie să aibă cel mai nobil curaj, un talent ieşit din comun şi un geniu de excepţie."

Sophie a obţinut unele rezultate lucrând la Marea Teoremă a lui Fermat, acestea fiind cele mai bune până în 1840. Între 1810 şi 1820 ea a lucrat la vibraţiile suprafeţelor, o problemă pusă de Institutul Franţei. În particular, se căuta o explicaţie pentru „tiparele Chladni" – tipare simetrice care apar atunci când se presară nisip pe o placă metalică pusă să vibreze prin intermediul unei corzi de vioară. La a treia sa încercare i s-a decernat o medalie de aur, însă din motive necunoscute, poate în semn de protest faţă de tratamentul nedrept al femeilor-oameni de ştiinţă, nu s-a prezentat la ceremonie.

În 1829 s-a îmbolnăvit de cancer la sân, dar a continuat să lucreze în domeniul teoriei numerelor şi al curburii suprafeţelor încă doi ani, până la moartea sa.

La ce ne ajută teoria numerelor

Teoria numerelor stă la baza multor coduri de securitate folosite în comerțul pe internet. Cel mai cunoscut e sistemul de criptare RSA (Ronald Rivest, Adi Shamir și Leonard Adleman), în care metoda de codificare a mesajelor poate fi anunțată public, fără a dezvălui procedeul invers de decodificare a mesajului.

Să presupunem că Alice vrea să-i trimită un mesaj secret lui Bob. În prealabil, ei stabilesc două numere prime foarte mari p și q (de cel puțin o sută de cifre fiecare) și le înmulțesc pentru a obține $M = pq$. Ei pot dezvălui public acest număr dacă doresc. Ei calculează de asemenea $K = (p - 1)(q - 1)$, dar îl țin secret.

Alice își reprezintă mesajul ca un număr x în intervalul de la 0 la M (sau ca un șir de asemenea numere dacă mesajul e lung). Pentru a codifica mesajul ea alege un număr a, care nu are divizori comuni cu K și calculează $y = x^a \pmod M$. Numărul a trebuie să fie cunoscut de Bob și poate de asemenea să fie dezvăluit public.

Pentru a decodifica mesajele, Bob trebuie să cunoască un număr b astfel încât $ab = 1 \pmod K$. Acest număr (care există și e unic) este păstrat secret. Pentru a-l decodifica pe y, Bob calculează

$$y^b \pmod M.$$

De ce aceasta decodifică? Deoarece

$$y^b \equiv (x^a)^b \equiv x^{ab} \equiv x^1 \equiv x \pmod M,$$

folosind o generalizare a Micii Teoreme a lui Fermat, datorată lui Euler.

Această metodă e practică deoarece există formule eficiente de a găsi numere prime foarte mari, dar nu se cunosc metode eficiente de determinare a divizorilor primi ai unui număr foarte mare. Așa încât, faptul că alții cunosc produsul pq nu-i ajută să găsească numerele p și q, iar fără ele nu pot afla valoarea lui b, necesară pentru decodificarea mesajului.

cadrul matematicii, dar irelevantă pentru lumea exterioară. Totul s-a schimbat odată cu apariția comunicațiilor digitale, la sfârșitul secolului XX. Din moment ce comunicațiile depindeau acum de numere, nu-i de mirare că teoria numerelor a ajuns în prim-planul acelor domenii de aplicație. Adesea trebuie să treacă ceva timp pentru ca o idee matematică bună să dobândească importanță practică – uneori chiar sute de ani –, dar până la urmă subiectele pe care matematicienii le găsesc semnificative în sine se dovedesc a fi valoroase și în lumea reală.

Inventarea analizei matematice

8

Cel mai important progres din istoria matematicii l-a reprezentat analiza matematică, inventată independent de Isaac Newton şi Gottfried Leibniz pe la 1680. Leibniz a publicat primul, dar Newton – ajutat de prieteni ultra-patrioţi – a pretins prioritatea afirmând că Leibniz l-a plagiat. Disputa a otrăvit timp de un secol relaţiile dintre matematicienii englezi şi cei de pe continent, principalii perdanţi fiind englezii.

Sistemul lumii

Deşi prioritatea îi revine pesemne lui Leibniz, Newton a transformat analiza matematică într-o tehnică esenţială pentru domeniul incipient al fizicii matematice, calea cea mai eficientă pentru înţelegerea lumii naturale. Newton şi-a numit teoria „Sistemul lumii". Poate că nu era o dovadă de mare modestie, dar descrierea era corectă. Înainte de Newton, cunoaşterea tiparelor din natură se reducea la ideile lui Galilei despre corpurile în mişcare, în particular traiectoria parabolică a unui obiect precum o ghiulea de tun, şi la descoperirea lui Kepler că Marte descrie pe cer o elipsă. După Newton, tiparele matematice au guvernat aproape totul în lumea fizică: mişcarea corpurilor terestre şi cereşti, curgerea aerului şi a apei, propagarea căldurii, luminii şi sunetului, forţa gravitaţiei.

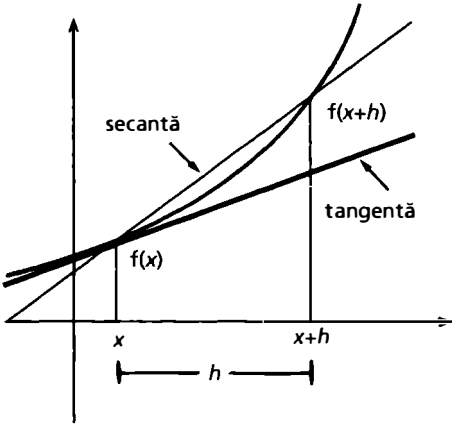
Cea mai importantă lucrare a lui Newton privind legile matematice ale naturii, *Principia mathematica*, nu menţionează deloc analiza matematică, ci se bazează pe o aplicare iscusită a geometriei, în stilul vechilor greci. Dar aparenţele sunt înşelătoare: documente nepublicate cunoscute sub titlul *Documentele de la Portsmouth* dovedesc că pe când lucra la *Principia* Newton avea deja ideile esenţiale ale analizei matematice. Probabil că Newton a folosit metodele analizei matematice în multe dintre descoperirile sale, dar a preferat să nu le prezinte pe această cale. Versiunea analizei matematice elaborată de el a fost publicată după moartea lui, în *Metoda fluxiunilor* din 1732.

Analiza matematică

Ce este analiza matematică? Metodele lui Newton şi Leibniz sunt mai uşor de înţeles dacă le trecem în revistă ideile principale. Analiza matematică se ocupă cu vitezele instantanee de variaţie – cât de repede variază o anumită cantitate

chiar în acest moment? Ca să luăm un exemplu fizic: un tren se deplasează pe o cale ferată; cât de repede se mişcă el *chiar acum*? Analiza matematică are două ramuri principale. *Calculul diferenţial* oferă metode de calcul al vitezelor de variaţie şi are numeroase aplicaţii geometrice, în particular găsirea tangentelor la curbe. *Calculul integral* procedează invers: dată fiind viteza de variaţie a unei anumite cantităţi, el determină cantitatea însăşi. Între aplicaţiile geometrice ale calculului integral se numără calculul ariilor şi volumelor. Poate că cea mai semnificativă descoperire e această neaşteptată conexiune între două probleme de geometrie clasică aparent fără legătură: determinarea tangentelor la o curbă şi determinarea ariilor.

Analiza matematică operează cu funcţii: proceduri prin care se ia un număr oarecare şi se calculează un număr asociat lui. Procedura este de regulă specificată printr-o formulă care atribuie unui număr dat x (eventual dintr-un anumit domeniu) un alt număr $f(x)$. Exemple pot fi funcţia rădăcină pătrată $f(x) = \sqrt{x}$ (care pretinde ca x să fie pozitiv) şi funcţia ridicare la pătrat $f(x) = x^2$ (unde nu există restricţii asupra lui x).



Geometria aproximărilor derivatei

Prima idee fundamentală a analizei matematice este *diferenţierea*, prin care se obţine *derivata* unei funcţii. Derivata este viteza de variaţie a lui $f(x)$ în comparaţie cu variaţia lui x – *viteza de variaţie* a lui $f(x)$ în raport cu x.

Din punct de vedere geometric, viteza de variaţie e panta tangentei la curba lui f în punctul x. Ea poate fi aproximată găsind panta *secantei* – o dreaptă care intersectează curba în două puncte învecinate, corespunzând lui x şi $x + h$, unde h este mic. Panta secantei este

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Să presupunem că h devine foarte mic. Atunci secanta se apropie de tangenta la grafic în x. De aceea, panta căutată – derivata lui f în x – este într-un anumit sens limita acestei expresii atunci când h devine oricât de mic.

Să încercăm acest calcul pe un exemplu foarte simplu, $f(x) = x^2$. Avem

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Când h devine foarte, foarte mic, panta $2x + h$ se apropie din ce în ce mai mult de $2x$. Aşadar, derivata lui f este funcţia g pentru care $g(x) = 2x$.

Principala problemă conceptuală este definirea noţiunii de limită. A fost nevoie de mai bine de un secol pentru a se ajunge la o definiţie coerentă logic.

Cealaltă idee fundamentală a analizei matematice este *integrarea*. Aceasta poate fi cel mai uşor înţeleasă drept procesul invers diferenţierii. Astfel, integrala lui g, notată

$$\int g(x)\,dx$$

este funcţia $f(x)$ care are derivata $g(x)$. De exemplu, deoarece derivata lui $f(x) = x^2$ este $g(x) = 2x$, integrala lui $g(x) = 2x$ este $f(x) = x^2$. În simboluri,

$$\int 2x\,dx = x^2.$$

Nevoia de analiză matematică

Inspiraţia în inventarea analizei matematice a venit din două direcţii. În cadrul matematicii pure, calculul diferenţial s-a dezvoltat din metodele de găsire a tangentelor la curbe, iar calculul integral din metodele pentru calculul ariilor figurilor plane şi volumelor corpurilor tridimensionale. Dar principalul imbold a venit din fizică – înţelegerea faptului că natura prezintă tipare. Din motive pe care încă nu le înţelegem pe deplin, multe dintre tiparele fundamentale ale naturii implică viteze de variaţie. De aceea ele nu au sens şi nu pot fi descoperite decât prin analiza matematică.

Înainte de Renaştere, cel mai precis model al mişcării Soarelui, Lunii şi planetelor era cel al lui Ptolemeu. În acest sistem, Pământul era fix, iar tot restul – inclusiv Soarele – se învârtea în jurul lui într-o serie de cercuri (reale sau imaginare, după gust). Cercurile au fost iniţial nişte sfere imaginate de astronomul grec Hiparh, care se roteau în jurul unor axe gigantice, dintre care unele erau ataşate altor sfere şi se mişcau împreună cu acestea. Acest tip de mişcare compusă părea necesar pentru a modela complexa mişcare a planetelor. Unele planete, precum Mercur, Venus şi Marte, păreau să se mişte de-a lungul unor traiectorii complicate, incluzând bucle. Altele – dintre care Jupiter şi Saturn erau singurele cunoscute la acea vreme – aveau un comportament mai liniştit, dar chiar şi ele prezentau neregularităţi stranii, cunoscute încă din vremea babilonienilor.

Am întâlnit deja modelul *epiciclurilor* lui Ptolemeu, care înlocuia sferele cu cercuri, dar păstra mişcarea compusă. Sistemul lui Hiparh nu

Sistemul lui Hiparh nu era prea exact...

era prea exact, în raport cu observațiile, însă cel al lui Ptolemeu se potrivea într-adevăr foarte bine cu observațiile, iar timp de peste o mie de ani a fost considerat ultimul cuvânt în domeniu. Scrierile sale, traduse în arabă sub titlul de *Almagesta*, au fost folosite de astronomii mai multor culturi.

Dumnezeu sau știința

Totuşi, nici *Almagesta* nu reuşea să fie în acord cu toate mişcările planetare. În plus, era destul de complicată. Pe la anul 1000, câțiva gânditori arabi şi europeni au început să se întrebe dacă mişcarea diurnă a Soarelui n-ar putea fi explicată printr-o rotație a Pământului, iar unii dintre ei analizau ipoteza că Pământul s-ar roti în jurul Soarelui. Dar, atunci, aceste speculații n-au dus nicăieri.

În Europa renascentistă atitudinea ştiințifică a început să prindă rădăcini, iar una dintre primele victime a fost dogma religioasă. Biserica romano-catolică exercita un puternic control asupra felului în care priveau universul credincioşii ei. Nu numai că existența universului şi evoluția lui de fiecare zi erau puse pe seama Dumnezeului creştin, dar se presupunea că natura universului corespunde *ad litteram* Bibliei. Ca urmare, Pământul era considerat centrul a toate, punctul fix în jurul căruia se rotesc cerurile, iar oamenii culmea întregii creații, rațiunea existenței universului.

Nici o observație ştiințifică nu poate infirma vreodată existența unui creator invizibil şi incognoscibil. Dar observațiile pot răsturna ideea că Pământul e centrul universului, şi chiar au făcut-o, provocând un imens scandal şi ducând la uciderea, uneori îngrozitor de crudă, a multor nevinovați.

Copernic

Punctul critic a fost atins în 1543, când învățatul polonez Nicolaus Copernic a publicat o carte uimitoare, originală şi oarecum eretică: *Despre rotațiile sferelor cereşti.* La fel ca Ptolemeu, el folosea epiciclurile pentru precizie. Spre deosebire de Ptolemeu, el plasa Soarele în centru, iar tot restul, inclusiv Pământul, dar exclusiv Luna, se rotea în jurul Soarelui. Luna era singura care se rotea în jurul Pământului.

Principalul motiv al lui Copernic pentru această propunere radicală era unul pragmatic: ea înlocuia cele 77 de epicicluri ale lui Ptolemeu cu numai 34. Printre epiciclurile considerate de Ptolemeu erau multe repetiții ale unui anume cerc: cercuri cu aceeaşi mărime şi viteză de rotație apăreau mereu, asociate mai multor corpuri. Copernic a înțeles că dacă toate aceste epicicluri ar fi transferate

Pământului, n-ar mai fi nevoie decât de unul singur. Noi interpretăm astăzi acest fapt prin mişcarea planetelor în raport cu Pământul. Dacă presupunem în mod eronat că Pământul e fix, aşa cum îi apare unui observator naiv, atunci mişcarea Pământului în jurul Soarelui se transferă tuturor planetelor ca un epiciclu suplimentar.

Alt avantaj al teoriei lui Copernic era că trata toate planetele în exact aceeaşi manieră. Ptolemeu avea nevoie de mecanisme diferite pentru a explica mişcarea planetelor interioare şi a celor exterioare. Acum, singura deosebire era că planetele interioare erau mai aproape de Soare decât Pământul, iar cele exterioare mai departe. Totul părea logic, dar ideea a fost respinsă din mai multe motive, nu toate religioase.

Teoria lui Copernic era complicată, neobişnuită, iar cartea lui greu de citit. Tyho Brahe, unul dintre cei mai buni astronomi de observaţie ai epocii, a descoperit discrepanţe între teoria heliocentrică a lui Copernic şi anumite observaţii subtile, care erau în dezacord şi cu teoria lui Ptolemeu; el a încercat să găsească un compromis mai bun.

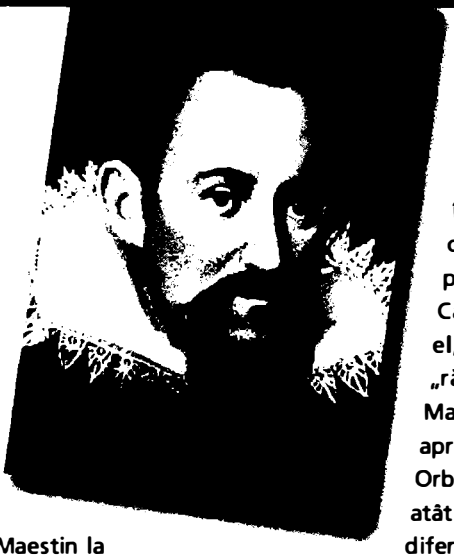
Kepler

După moartea lui Brahe, hârtiile sale au fost moştenite de Kepler, care a analizat ani de-a rândul observaţiile, căutând tipare. Kepler era un fel de mistic, în tradiţia pitagoreică, şi tindea să impună tipare artificiale datelor observate. Cea mai celebră dintre aceste tentative eşuate de a găsi regularităţi ale cerului a fost frumoasa, dar complet greşita lui explicaţie a distanţelor dintre orbitele planetare pe baza poliedrelor regulate. În vremea sa, planetele cunoscute erau în număr de şase: Mercur, Venus, Pământ, Marte, Jupiter şi Saturn. Kepler s-a întrebat dacă distanţele lor până la Soare prezentau vreun tipar geometric. Mai mult, el s-a întrebat de ce erau şase planete. A observat că şase planete lasă loc pentru intercalarea a cinci forme, şi cum existau exact cinci poliedre regulate, aceasta ar fi explicat limitarea la şase a numărului planetelor. A imaginat o serie de şase sfere dispuse una într-alta, fiecare având de-a lungul ecuatorului orbita unei planete. Între sfere, strâns cuibărite, atingând exteriorul unei sfere şi interiorul alteia, el a aşezat cele cinci poliedre în ordinea:

Mercur
Octaedru
Venus
Icosaedru
Pământ
Dodecaedru
Marte
Tetraedru
Jupiter
Cub
Saturn

Johannes Kepler

1571–1630



Kepler a fost fiul unui mercenar şi al fetei unui hangiu. Copilăria şi-a petrecut-o alături de mama sa în hanul bunicului, după ce tatăl lui a murit, probabil într-un război între Ţările de Jos şi Sfântul Imperiu Roman. A dovedit de timpuriu talent matematic, iar în 1589 a studiat astronomia cu Michael Maestin la Universitatea din Tübingen. Aici s-a chinuit cu sistemul lui Ptolemeu. Majoritatea astronomilor din epocă erau mai preocupaţi să calculeze orbite decât să se întrebe cum se mişcă de fapt planetele, dar pe Kepler îl interesau traiectoriile exacte ale planetelor mai mult decât sistemul epiciclurilor. A aflat de sistemul lui Copernic şi s-a convins repede că nu era un simplu artificiu matematic.

Colaborarea cu Brahe

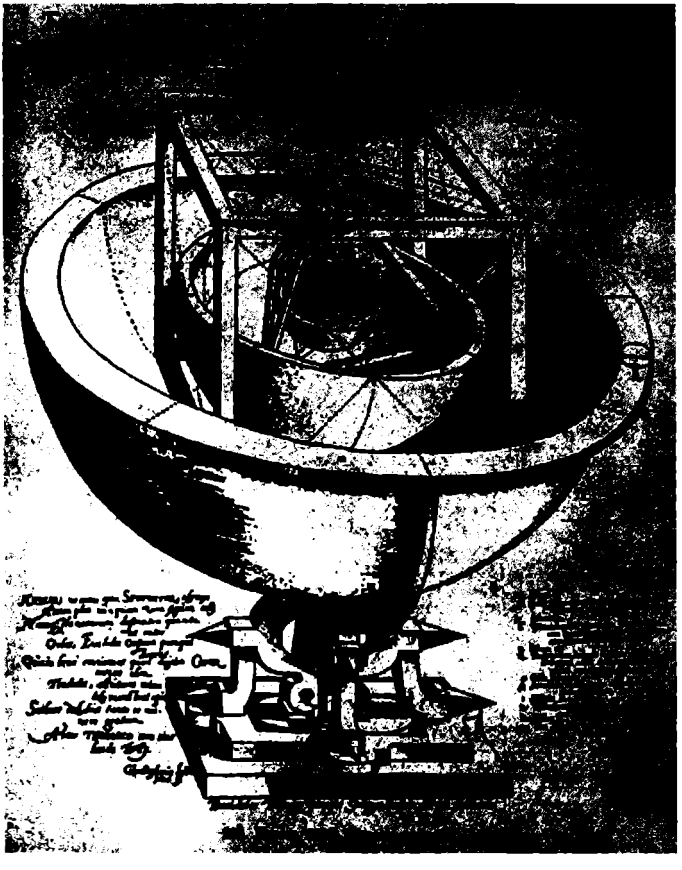
În 1596 a făcut prima încercare de a găsi tipare ale mişcării planetelor, în al său *Mysterium cosmographicum* (*Misterul cosmosului*), cu un model straniu, bazat pe poliedre regulate. Modelul nu se potrivea bine cu observaţiile, aşa încât Kepler i-a scris lui Tyho Brahe, celebru pentru observaţiile sale. Kepler i-a oferit ajutorul lui matematic şi a fost pus să studieze orbita lui Marte. După moartea lui Brahe, a continuat să se ocupe de această problemă. Brahe lăsase o imensă cantitate de date, iar Kepler a încercat să găsească o orbită care să se potrivească cu ele. Calculele rămase de la el, pe care le-a numit „războiul meu cu Marte", se întind pe aproape o mie de pagini. Orbita rezultată a fost atât de precisă, încât diferenţă faţă de cea actuală e infimă.

Timpuri grele

1611 a fost un an rău. Fiul lui Kepler a murit la vârsta de şapte ani. Curând, a murit şi soţia lui. Apoi, împăratul Rudolf, care-i tolera pe protestanţi, a abdicat, iar Kepler a fost silit să părăsească Praga. În 1613, Kepler s-a recăsătorit; o idee care i-a venit în timpul nunţii l-a determinat să scrie în 1615 *Noua stereometrie a butoaielor de vin*.

În 1619 publică *Harmonices Mundi* (*Armonia lumii*), o continuare a *Misterului cosmosului*. Cartea conţinea multă matematică nouă, între care modele de pavaj şi poliedre. Se găsea acolo şi legea a treia a mişcării planetare. În timp ce lucra la carte, mama lui a fost acuzată de vrăjitorie. Cu ajutorul Facultăţii de drept din Tübingen, ea a fost în cele din urmă eliberată, în parte deoarece anchetatorii aplicaseră incorect procedurile legale pentru tortură.

Teoria lui Kepler privind distanțele între orbitele planetare



Numerele se potriveau destul de bine, mai ales ținând seama de precizia limitată a observațiilor la acea vreme. Există însă 120 de moduri diferite în care pot fi aranjate cele cinci poliedre, ceea ce conduce la o mulțime de distanțe diferite între planete. Nu e deloc surprinzător că unul dintre ele se afla într-un acord rezonabil cu realitatea. Descoperirea ulterioară a altor planete a dat o lovitură puternică acestei tentative de găsire a unui tipar, trimițându-l în vastul depozit de vechituri al istoriei.

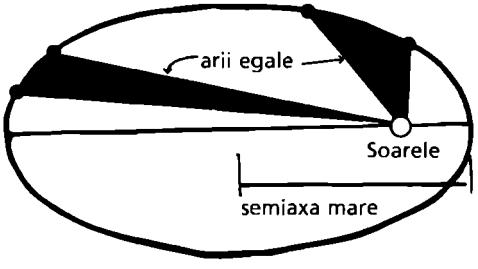
Kepler a descoperit însă anumite tipare, valabile și azi, cunoscute drept *Legile mișcării planetare*. El a extras aceste legi, după douăzeci de ani de calcule, din observațiile lui Brahe asupra lui Marte. Legile afirmă:

(i) Planetele se rotesc în jurul Soarelui pe orbite eliptice.

(ii) Planetele mătură arii egale în timpi egali.

(iii) Pătratul perioadei de revoluție a oricărei planete e proporțional cu cubul distanței medii până la Soare.

Cea mai neortodoxă trăsătură a teoriei lui Kepler e abandonarea clasicului cerc (considerat prin tradiție forma perfectă) în favoarea elipsei. A făcut acest pas nu fără o anume reticență, spunând el însuși că s-a oprit la elipsă doar atunci când tot restul fusese eliminat. Nu există vreun motiv special de a ne aștepta ca aceste trei legi să se apropie mai mult de realitate decât aranjamentul ipotetic al poliedrelor regulate, numai că ele s-au dovedit de mare importanță științifică.



Mișcările unui planete
în intervale egale de timp

Galilei

Un alt personaj-cheie al epocii a fost Galileo Galilei, care a descoperit legile matematice ale mișcării pendulului și ale căderii corpurilor. În 1589, ca profesor de matematică la Universitatea din Pisa, a efectuat experimente asupra rostogolirii corpurilor pe plane înclinate, dar nu și-a publicat rezultatele. Atunci și-a dat seama de importanța experimentelor controlate în studiul fenomenelor naturale, idee în prezent esențială pentru întreaga știință. S-a apucat de astronomie, făcând o serie de descoperiri fundamentale, care l-au determinat să îmbrățișeze teoria copernicană. A ajuns astfel în conflict cu Biserica, iar în cele din urmă a fost judecat pentru erezie și pus sub arest la domiciliu.

În ultimii ani ai vieții a scris *Discursuri și demonstrații matematice despre cele două noi științe*, expunându-și rezultatele privind mișcarea de rostogolire a corpurilor pe plane înclinate. A arătat că distanța parcursă de un corp aflat inițial în repaus sub acțiunea unei accelerații constante e proporțională cu pătratul timpului. Această lege explică descoperirea sa anterioară că un proiectil urmează o traiectorie parabolică. Împreună cu legile mișcării planetare ale lui Kepler, aceasta a dat naștere unei noi discipline: *mecanica*, studiul matematic al corpurilor în mișcare.

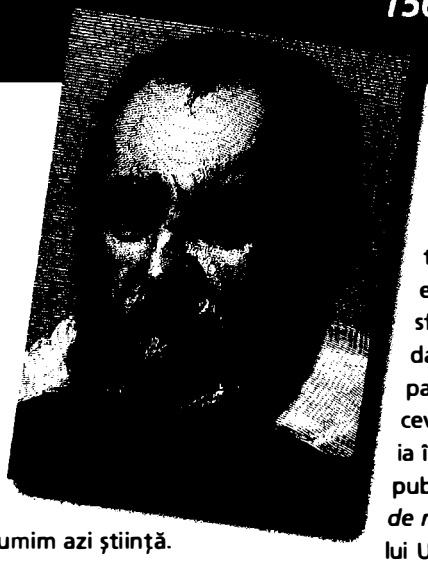
Acesta este fundalul fizico-astronomic care a dus la apariția analizei matematice. Vom examina acum fundalul matematic.

Inventarea analizei matematice

Inventarea analizei matematice a fost rezultatul cercetărilor anterioare legate de probleme aparent disparate, dar având o unitate ascunsă. Printre ele se numără calculul vitezei instantanee a unui obiect în mișcare cunoscând distanța parcursă

Galileo Galilei

1564–1642



Galilei a fost fiul unui profesor de muzică ce efectuase experienţe cu corzi pentru a-şi demonstra teoriile muzicale. La vârsta de zece ani, e trimis pentru studii la mânăstirea Vallombrosa, în ideea de a deveni medic. Dar nu-l interesează cu adevărat medicina şi îşi petrece timpul ocupându-se cu matematica şi cu filozofia naturii – ceea ce numim azi ştiinţă.

În 1589 Galilei devine profesor de matematică la Universitatea din Pisa. În 1591 obţine un post mai bine plătit la Padova, unde predă studenţilor la medicină geometria lui Euclid şi astronomia. La vremea aceea medicii foloseau astrologia în tratarea bolnavilor, aşa încât aceste materii erau o parte necesară a programei.

Aflând de inventarea telescopului, Galilei îşi construieşte unul şi devine atât de priceput încât cedează Senatului venetian dreptul exclusiv de folosire a metodelor sale, în schimbul unei creşteri a salariului. În 1609 Galilei observă cerul, făcând descoperire după descoperire: patru din sateliţii lui Jupiter, stele individuale din Calea Lactee, munţi pe Lună. Îi prezintă un telescop lui Cosimo de Medici, Marele Duce al Toscanei, şi devine curând principalul matematician al ducelui.

Descoperă existenţa petelor solare şi publică această observaţie în 1612. Descoperirile sale astronomice îl convinseseră de adevărul teoriei heliocentrice a lui Copernic, iar în 1616 îşi dezvăluie vederile într-o scrisoare către Marea Ducesă Cristina, spunând că teoria copernicană reprezintă realitatea fizică şi nu e doar un mijloc comod de simplificare a calculelor.

În acel moment, papa Paul al V-lea ordonă Inchiziţiei să decidă asupra adevărului sau falsităţii teoriei heliocentrice, iar ea e declarată falsă. Galilei e sfătuit să nu susţină teoria, dar cum fusese ales un nou papă, Urban VIII, care părea ceva mai tolerant, Galilei nu ia în serios interdicţia. În 1623 publică *Il Saggiatore* (*Balanţa de maximă precizie*), dedicată lui Urban. În ea apare faimoasa afirmaţie că universul „este scris în limba matematicii, iar literele lui sunt triunghiuri, cercuri şi alte figuri matematice, fără de care este omeneşte imposibil să pricepi un singur cuvânt".

În 1630 Galilei cere permisiunea de a publica o altă carte, *Dialog asupra celor două mari sisteme ale lumii*, despre teoriile heliocentrică şi geocentrică. În 1632 primeşte acordul de la Florenţa (dar nu şi de la Roma), şi cartea apare. Ea pretindea să demonstreze că Pământul se mişcă, principala probă fiind mareele. De fapt, teoria lui Galilei despre maree era complet greşită, dar autorităţile ecleziastice consideră cartea dinamită teologică, iar Inchiziţia o interzice, convocându-l pe Galilei la Roma, spre a fi judecat pentru erezie. E găsit vinovat, dar scapă cu o sentinţă de închisoare pe viaţă, sub forma arestului la domiciliu. Soarta lui a fost mai bună decât a multor eretici, pentru care pedeapsa obişnuită era arderea pe rug. Pe când se află în arest la domiciliu scrie *Discursurile*, explicând lumii cercetările sale asupra corpurilor aflate în mişcare. Manuscrisul e scos în secret din Italia şi publicat în Olanda.

de el la orice moment de timp, găsirea tangentei la o curbă, găsirea lungimii unei curbe, găsirea valorilor maximă şi minimă ale unei cantităţi variabile, găsirea ariei unei figuri plane şi a volumului unui corp tridimensional. Anumite idei şi exemple importante au fost aduse de Fermat, Descartes şi un englez mai puţin cunoscut, Isaac Barrow, dar metodele erau valabile doar pentru probleme particulare. Se simţea nevoia unei metode generale.

Leibniz

Prima descoperire adevărată a fost făcută de Gottfried Wilhelm Leibniz, un jurist de profesie, care şi-a dedicat mare parte din viaţă matematicii, logicii, filozofiei, istoriei şi multor altor ramuri ale ştiinţei. Pe la 1673 a început să lucreze la problema clasică a găsirii tangentei la o curbă, şi a observat că era problema inversă a calculului ariilor şi volumelor. Aceasta din urmă se reducea la găsirea unei curbe când se dădeau tangentele ei.

Leibniz a folosit această legătură pentru a defini ceea ce erau de fapt integralele, folosind prescurtarea omn (de la *omnia*, cuvântul latinesc pentru „toate"). Găsim astfel în manuscrisele sale formule de genul

$$\text{omn } x^2 = \frac{x^3}{3}$$

Pe la 1675 el îl înlocuise pe *omn* prin simbolul $\int$ folosit şi astăzi, care este o literă *s* de stil vechi, alungită, însemnând sumă. El opera cu mici creşteri dx şi dy ale cantităţilor x şi y, şi folosea raportul lor dy/dx pentru a determina viteza de variaţie a lui y în funcţie de x. De pildă, dacă f este o funcţie, atunci Leibniz scria

$$dy = f(x + dx) - f(x),$$

aşa încât

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

care este obişnuita aproximare a secantei pentru panta tangentei.

Leibniz şi-a dat seama că această notaţie are problemele ei. Dacă dy şi dx sunt nenule, atunci dy/dx nu este viteza instantanee de variaţie a lui y, ci o aproximaţie a ei. A încercat să depăşească acest neajuns presupunând că dx şi dy sunt infinit de mici. O *infinitezimală* e un număr nenul care e mai mic decât orice alt număr nenul. Din păcate, e uşor de văzut că asemenea numere nu pot exista (jumătatea unei infinitezimale este tot nenulă, dar mai mică), aşa încât această abordare nu face decât să mute neajunsul în altă parte.

Pe la 1676 Leibniz ştia să integreze şi să diferenţieze orice putere a lui x, scriind formula

$$dx^n = nx^{n-1}dx$$

pe care noi am scrie-o astăzi

$$\frac{d}{dx}\, x^n = nx^{n-1}$$

În 1677 a dedus regulile pentru diferenţierea sumei, produsului şi raportului a două funcţii, iar pe la 1680 obţinuse formulele pentru lungimea unui arc de curbă şi pentru volumul unui corp de rotaţie, ca integrale ale diferitelor cantităţi legate de ele.

Cunoaştem toate aceste rezultate, şi datele asociate lor, din notele sale nepublicate, dar el şi-a publicat ideile despre analiză relativ târziu, în 1684. Jakob şi Johann Bernoulli au găsit lucrarea obscură, spunând despre ea că e „mai curând o enigmă decât o explicaţie". Privind retrospectiv, vedem că la acea vreme Leibniz descoperise o parte importantă din bazele analizei, cu aplicaţii la curbe complicate precum cicloida, şi înţelegea bine noţiuni cum ar fi curbura. Din păcate, scrierile lui erau fragmentare şi practic ilizibile.

Newton

Celălalt creator al analizei matematice a fost Isaac Newton. Doi dintre prietenii săi, Isaac Barrow şi Edmond Halley, i-au recunoscut remarcabilele înzestrări şi l-au încurajat să-şi publice rezultatele. Lui Newton nu-i plăcea să fie criticat, iar când, în 1672, şi-a publicat ideile despre lumină, lucrarea sa a declanşat o furtună de critici, ceea ce i-a accentuat reţinerea de a-şi încredinţa gândurile tiparului. A continuat totuşi să publice sporadic şi a scris două cărţi. Şi-a dus mai departe ideile despre gravitaţie, iar în 1684 Halley a încercat să-l convingă să-şi publice rezultatele. Dar pe lângă aversiunea lui Newton faţă de critică mai exista un obstacol tehnic. Fusese nevoit să modeleze planetele ca particule punctiforme, cu masă nenulă, dar cu volum nul, ceea ce el simţea că e nerealist şi că va provoca obiecţii. Ar fi vrut să înlocuiască punctele nerealiste prin sfere pline, dar nu putea demonstra că atracţia gravitaţională a unei sfere e aceeaşi cu cea a unei particule punctiforme de aceeaşi masă.

***Principia* a văzut lumina tiparului în 1687.**

În 1686 a reuşit să umple această lacună, iar *Principia* a văzut lumina tiparului în 1687. Lucrarea conţinea multe idei noi. Cele mai importante erau

legile matematice ale mişcării, extinzând rezultatele lui Galilei, şi gravitaţia, bazată pe legile găsite de Kepler.

Principala lege de mişcare a lui Newton (mai există şi altele) spune că acceleraţia unui corp aflat în mişcare înmulţită cu masa lui este egală cu forţa care acţionează asupra corpului. Viteza e însă derivata spaţiului, iar acceleraţia e derivata vitezei. Astfel, fie şi numai pentru a *enunţa* legea lui Newton, avem nevoie de *derivata a doua* a spaţiului în raport cu timpul, notată acum prin

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

Newton folosea notaţia cu două puncte deasupra lui x ($\ddot{x}$).

Legea gravitaţiei spune că toate particulele de materie se atrag reciproc cu o forţă proporţională cu masele lor şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele. De exemplu, forţa cu care Pământul este atras de Lună ar deveni de patru ori mai mică dacă Luna ar fi împinsă la o distanţă de două ori mai mare, sau de nouă ori mai mică dacă distanţa s-ar tripla. Din nou, deoarece legea se referă la forţe, ea implică derivata a doua a spaţiului.

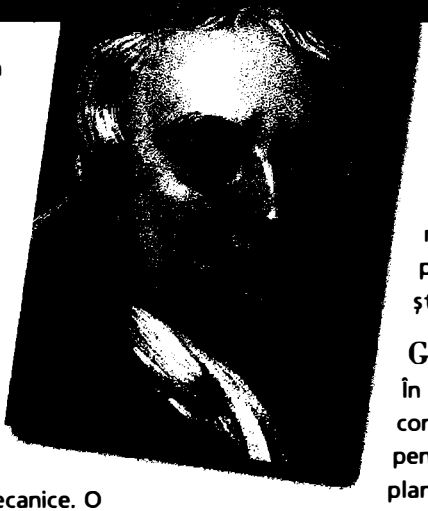
Newton a dedus această lege din cele trei legi ale mişcării planetare stabilite de Kepler. Deducerea publicată de el era o capodoperă de geometrie euclidiană clasică. Newton a ales acest stil de prezentare deoarece el implica o matematică familiară, şi deci nu era uşor de criticat. Dar multe aspecte atinse în *Principia* îşi datorează geneza invenţiei newtoniene încă nepublicate a analizei matematice.

Unul dintre primele sale studii pe această temă a fost o lucrare intitulată *Asupra analizei prin intermediul ecuaţiilor cu un număr infinit de termeni*, pe care a prezentat-o câtorva prieteni în 1669. În limbaj modern, el se întreba care e ecuaţia unei funcţii $f(x)$, dacă aria de sub graficul ei este de forma x^m. (De fapt, întrebarea lui era ceva mai generală, dar să rămânem la varianta ei simplificată.) El a dedus că răspunsul este $f(x) = mx^{m-1}$.

Felul în care aborda Newton calculul derivatelor semăna mult cu cel al lui Leibniz, exceptând faptul că el folosea o în loc de dx, aşa încât metoda lui suferă de aceeaşi problemă logică: pare a fi doar aproximativă. Dar Newton a demonstrat că, presupunându-l pe o foarte mic, aproximaţia devine din ce în ce mai bună. La limită, când o devine oricât de mic vrem, eroarea dispare. Aşa încât, susţinea Newton, rezultatul final este *exact*. El a introdus un cuvânt nou, *fluxiune*, pentru a prinde ideea principală – cea a unei cantităţi curgând spre zero, fără a ajunge însă efectiv acolo.

În 1671 a scris un tratat mai extins, *Metoda fluxiunilor şi a seriilor infinite*. Prima sa carte de analiză matematică fost publicată abia în 1711; a doua a

Isaac Newton
1642–1727



Newton a copilărit la o fermă în sătucul Woolsthorpe din Lincolnshire. Tatăl lui murise cu două luni înainte de naşterea sa, iar mama lui administra ferma. A învăţat la şcoala din localitate, fără să dovedească alt talent decât îndemânarea în manevrarea jucăriilor mecanice. O dată a construit un balon cu aer cald şi l-a testat cu pisica familiei drept pilot; nici balonul, nici pisica n-au mai fost văzute vreodată. A intrat la Trinity College din Cambridge, cu rezultate destul de bune la examenul de admitere – în afara geometriei. Ca student, n-a făcut mare impresie în primii ani de studiu.

Ciuma

Apoi, în 1665, marea ciumă a început să devasteze Londra şi zonele învecinate, iar studenţii au fost trimişi acasă înainte ca acelaşi lucru să se întâmple la Cambridge. Întors la ferma familială, Newton a început să mediteze mult mai profund la temele ştiinţifice şi matematice.

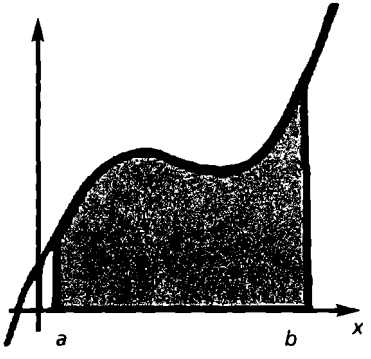
Gravitaţia

În anii 1665–1666 a conceput legea gravitaţiei pentru a explica mişcarea planetelor, a elaborat legile mecanicii pentru a explica şi analiza mişcarea oricărui corp sau particule, a inventat atât calculul diferenţial, cât şi cel integral şi a făcut mari progrese în optică. Ca de obicei, nu-şi publică nici una dintre lucrări, întorcându-se liniştit la Trinity pentru a-şi lua licenţa şi a fi ales *fellow* al colegiului. A obţinut apoi postul de profesor lucasian de matematică, după demisia în 1669 a predecesorului său, Barrow. A ţinut cursuri lipsite de strălucire, urmărite de foarte puţini studenţi.

apărut în 1736. E limpede că pe la 1671 Newton ajunsese la ideile fundamentale ale analizei matematice.

Criticii acestui procedeu, în special episcopul George Berkeley în cartea sa din 1734, *Analistul, discurs adresat unui matematician necredincios*, au arătat că e ilogic să împarţi numărătorul şi numitorul la o, dacă ulterior o este adus la 0. Într-adevăr, procedeul ascunde faptul că fracţia este în realitate 0/0, despre care e bine ştiut că nu are sens. Newton a răspuns că el nu-l aducea efectiv pe o la 0, ci determina ce se întâmplă când o devine oricât de apropiat de 0, *fără a ajunge efectiv acolo*. Metoda opera cu fluxiuni, nu cu numere.

Matematicienii căutau refugiu în analogii fizice – Leibniz invoca „spiritul de finețe", opunându-l „spiritului logicii" – dar Berkeley avea perfectă dreptate. A trebuit să treacă mai bine de un secol pentru a se găsi un răspuns bun la obiecțiile sale, prin definirea într-o manieră riguroasă a noțiunii intuitive de „trecere la limită". Calculul diferențial s-a transformat atunci într-un domeniu mai subtil – *analiza matematică*. Dar timp de un secol după inventarea sa nimeni în afară de Berkeley nu s-a sinchisit prea mult de fundamentele lui logice, iar el a înflorit în ciuda acestei lacune.



Integrala definită

A înflorit pentru că Newton avea dreptate, dar vor trece aproape 200 de ani până când conceptul lui de fluxiune să fie formulat într-un mod logic acceptabil, în termeni de limite. Din fericire pentru matematică, progresul n-a fost oprit în loc până la descoperirea unui fundament logic satisfăcător. Calculul diferențial era prea util și prea important pentru a fi blocat de câteva ambiguități logice. Berkeley era revoltat, susținând că metoda părea să funcționeze doar fiindcă diversele erori se anulau reciproc. Avea dreptate – dar nu cercetase *de ce* se anulau ele întotdeauna. Fiindcă, dacă așa stăteau lucrurile, ele nu mai erau erori!

Asociat cu diferențierea este procesul invers, *integrarea*. Integrala lui $f(x)$, notată $\int g(x)dx$, este orice funcție care prin diferențiere dă $f(x)$. Din punct de vedere geometric ea reprezintă aria de sub graficul funcției f. *Integrala definită* $\int_a^b g(x)dx$ este aria de sub grafic între limitele $x = a$ și $x = b$.

Derivatele și integralele rezolvau probleme care sfidaseră ingeniozitatea matematicienilor din trecut. Viteze, tangente, maxime și minime puteau fi toate găsite folosind diferențierea. Lungimi, arii și volume puteau fi calculate prin integrare. Iar asta nu era totul. În mod surprinzător, se părea că tiparele naturii erau scrise în limbajul analizei matematice.

Englezii sunt lăsați în urmă

Pe măsură ce importanța analizei devenea tot mai clară, un prestigiu tot mai mare îi revenea creatorului ei. Dar cine era de fapt creatorul?

Am văzut că Newton a început să se gândească la calculul diferențial în 1665, dar n-a publicat nimic până în 1687. Leibniz, ale cărui idei urmau linii similare cu ale lui Newton, începuse să lucreze la analiză în 1673 și și-a

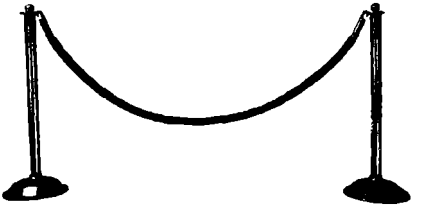
La ce i-a ajutat analiza matematică

Una dintre primele aplicații ale calculului diferențial și integral la înțelegerea fenomenelor naturale a fost legată de problema formei unui lanț lăsat să atârne. Unii matematicieni credeau că răspunsul este o parabolă, alții nu erau de acord. În 1691 Leibniz, Christian Huygens și Bernoulli au publicat fiecare câte o propunere de soluție. Cea mai clară era a lui Bernoulli. El a scris o ecuație diferențială care descria poziția lanțului, bazată pe mecanica newtoniană și pe legile de mișcare ale lui Newton.

S-a dovedit că soluția nu era o parabolă, ci o curbă numită lănțișor, având ecuația

$$y = k(e^x + e^{-x}),$$

unde k este o constantă.



Un lanț lăsat să atârne ia forma curbei lănțișor

Cablurile podurilor suspendate sunt însă parabolice. Diferența apare deoarece aceste cabluri susțin atât greutatea podului, cât și propria lor greutate. Și acest lucru poate fi demonstrat folosind calculul diferențial.

Podul suspendat de la Clifton – o parabolă

publicat primele articole în 1684. Cei doi au lucrat independent, dar Leibniz *ar fi putut* afla rezultatele lui Newton atunci când a vizitat Parisul în 1672 şi Londra în 1673; Newton trimisese un exemplar din *Despre analiză* lui Barrow în 1669, iar Leibniz a vorbit cu mai mulţi cunoscuţi ai lui Barrow.

Când Leibniz şi-a publicat rezultatul în 1684, unii dintre prietenii lui Newton s-au simţit lezaţi – probabil fiindcă i-o luase înainte, iar ei şi-au dat seama prea târziu care era miza – şi l-au acuzat pe Leibniz că i-ar fi furat ideile lui Newton. Matematicienii de pe continent, în special cei din familia Bernoulli, i-au sărit în apărare lui Leibniz, sugerând că Newton, nu Leibniz, era cel vinovat de plagiat. De fapt, amândoi făcuseră descoperirile în mare măsură independent, după cum o arată manuscrisele lor nepublicate; pentru ca lucrurile să fie şi mai încurcate, amândoi folosiseră din plin rezultatele lui Barrow, care ar fi avut pesemne motive mai temeinice să se simtă nedreptăţit.

Acuzaţiile ar fi putut fi cu uşurinţă retrase, dar disputa s-a înfierbântat tot mai mult; Johann Bernoulli şi-a extins antipatia faţă de Newton la întreaga naţiune britanică. Rezultatul final a fost un dezastru pentru matematica britanică, deoarece englezii s-au cramponat de stilul geometric de gândire al lui Newton, dificil de folosit, în vreme ce analiza continentală, apelând la metodele algebrice, mai formale, ale lui Leibniz, a înaintat într-un ritm rapid. Cele mai mari merite în fizica matematică le-au revenit astfel francezilor, germanilor, elveţienilor şi olandezilor, pe când matematicienii englezi lâncezeau.

Ecuaţia diferenţială

Cea mai importantă idee care a reieşit din puzderia lucrărilor de analiză a fost existenţa, şi utilitatea unui nou tip de ecuaţie – *ecuaţia diferenţială*. Ecuaţiile algebrice leagă între ele diferite puteri ale unui număr necunoscut. Ecuaţiile diferenţiale sunt mult mai impresionante: leagă între ele diferite derivate ale unei funcţii necunoscute.

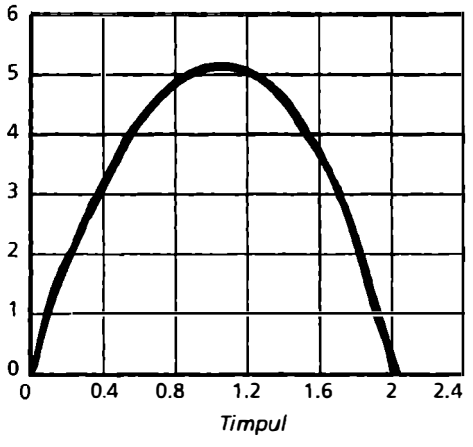
Legea newtoniană a mişcării ne spune că dacă $y(t)$ este înălţimea la care se află o particulă în mişcare, sub influenţa gravitaţiei, în apropierea suprafeţei Pământului, atunci derivata a doua $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2$ este proporţională cu forţa g care acţionează asupra ei:

$$g = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

unde m este masa particulei. Această ecuaţie specifică nu funcţia y direct, ci o proprietate a celei de-a doua derivate a sa. Pentru a o găsi pe y, trebuie să rezolvăm ecuaţia diferenţială. Două integrări succesive ne dau soluţia

$$y = \frac{gt^2}{2m}\ y + at + b$$

unde b este înălțimea inițială la care se află particula, iar a este viteza ei inițială. Formula ne spune că graficul înălțimii y în raport cu timpul t este o parabolă răsturnată. Aceasta e observația lui Galilei.



Traiectoria parabolică a unui proiectil

Eforturile de pionierat ale lui Copernic, Kepler, Galilei și ale altor savanți renascentiști au condus la descoperirea tiparelor matematice ale lumii naturale. Unele tipare ce păreau evidente s-au dovedit a fi false și au fost abandonate; altele ofereau modele foarte precise ale naturii și au fost reținute și dezvoltate. Pornind de aici, a câștigat tot mai mult teren ideea că trăim într-un univers ca un ceasornic, funcționând după reguli rigide, imuabile, în ciuda unei puternice opoziții religioase, mai ales din partea Bisericii Catolice.

Marea descoperire a lui Newton a fost că tiparele naturii par să se manifeste nu ca regularități ale anumitor cantități, ci ca relații între *derivatele* lor. Legile naturii sunt scrise în limbajul calculului diferențial; ce contează nu sunt valorile variabilelor fizice, ci vitezele lor de variație. A fost o idee profundă și a provocat o revoluție, conducând mai mult sau mai puțin direct la știința modernă și transformând pentru totdeauna planeta noastră.

La ce ne ajută analiza matematică

Ecuațiile diferențiale sunt omniprezente în știință: sunt de departe mijlocul cel mai răspândit de modelare a sistemelor naturale. Se folosesc, de pildă, pe larg pentru a calcula traiectoriile sondelor spațiale, cum ar fi misiunea Mariner către Marte, cele două nave Pioneer care au explorat sistemul solar și ne-au transmis imagini atât de minunate ale planetelor Jupiter, Saturn, Uranus și Neptun, sau vehiculelele-robot cu șase roți *Spirit* și *Opportunity*, care au cercetat Planeta Roșie.

Misiunea Cassini, care explorează planeta Saturn și sateliții ei, este un alt exemplu. Între descoperirile ei se numără existența lacurilor de metan și etan lichid pe satelitul Titan al lui Saturn. Desigur, calculul diferențial nu e unica tehnică folosită de misiunile spațiale – dar fără el aceste nave n-ar fi fost niciodată lansate.

Dintr-o perspectivă mai practică, orice avion care zboară, orice automobil care parcurge un drum, orice pod suspendat și orice construcție rezistentă la cutremure își datorează parțial proiectarea calculului diferențial. Până și descrierea modului în care variază numeric populațiile de animale provine din ecuațiile diferențiale. Același lucru e valabil pentru răspândirea epidemiilor, unde modelele analitice sunt folosite pentru a planifica cea mai eficientă cale de a interveni și de a împiedica o răspândire dezastruoasă. Un model recent pentru epidemia de febră aftoasă în Marea Britanie a dovedit că strategia adoptată nu era cea optimă.

9

Formularea legilor fizicii

Mesajul central din *Principia* lui Newton nu era legat de legile naturii descoperite şi folosite de el, ci de ideea că asemenea legi există – împreună cu dovada că modelarea legilor naturii se face prin ecuaţii diferenţiale. În timp ce matematicienii englezi îl acuzau pe Leibniz de pretinsul (şi absolut fictivul) furt al ideilor lui Newton, matematicienii de pe continent profitau din plin de marea descoperire a lui Newton, făcând importante incursiuni în mecanica cerească, elasticitate, dinamica fluidelor, căldură, lumină şi sunet – temele majore ale fizicii matematice. Multe dintre ecuaţiile deduse de ei sunt folosite şi azi, în ciuda – sau poate tocmai datorită – marilor progrese ale fizicii.

Ecuaţiile diferenţiale

Matematicienii au început prin a căuta formule explicite pentru soluţiile unor tipuri particulare de ecuaţii diferenţiale. Într-un fel, era o alegere nefericită, pentru că în genere formule de acest tip nu există, aşa încât atenţia s-a îndreptat spre ecuaţiile ce puteau fi rezolvate printr-o formulă, şi nu spre ecuaţiile care descriu cu adevărat natura. Un bun exemplu este ecuaţia pentru un pendul, care ia forma

...atenţia s-a îndreptat spre ecuaţiile ce puteau fi rezolvate printr-o formulă...

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \sin\theta = 0$$

pentru o constantă convenabil aleasă k, unde t este timpul, iar θ este unghiul la care atârnă pendulul, $\theta = 0$ fiind poziţia verticală. Această ecuaţie nu admite nici o soluţie exprimabilă prin funcţii elementare (polinomiale, exponenţiale, trigonometrice, logaritmice ş.a.m.d.). Există o soluţie implicând funcţii eliptice, care au fost inventate un secol mai târziu. Presupunând însă că unghiul e mic, deci considerând un pendul care face mici oscilaţii, atunci sin θ e aproximativ egal cu θ, iar această aproximaţie e cu atât mai bună cu cât q este mai mic. Astfel, ecuaţia poate fi înlocuită prin

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta = 0$$

iar acum există o formulă pentru soluția generală, dată de

$$\theta = A \sin kt + B \cos kt$$

cu constantele A și B determinate de poziția și viteza unghiulară inițiale ale pendulului.

Această abordare are anumite avantaje: de pildă, putem deduce ușor că perioada pendulului – timpul necesar pentru o oscilație completă – este $2\pi/k$. Principalul dezavantaj este că soluția e inutilizabilă atunci când θ devine suficient de mare (chiar și un unghi de 20° e mare dacă dorim un răspuns precis). Se mai pune și problema rigorii: o soluție exactă a unei ecuații aproximative este oare o soluție aproximativă a ecuației exacte? În acest caz răspunsul e afirmativ, dar demonstrația a venit abia pe la 1900.

Cea de-a doua ecuație poate fi rezolvată explicit deoarece este *liniară* – conține doar puterea întâi a necunoscutei θ și a derivatei sale, iar coeficienții sunt constanți. Funcția-cheie pentru toate ecuațiile diferențiale este exponențiala $y = e^x$. Ea satisface ecuația

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$$

Cu alte cuvinte, e^x este propria sa derivată. Această proprietate e unul dintre motivele pentru care numărul e apare în chip natural. O consecință este că derivata logaritmului natural $\ln x$ este $1/x$, deci integrala lui $1/x$ este $\ln x$. Orice ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți poate fi rezolvată folosind exponențiale și funcții trigonometrice (care vom vedea în curând că sunt niște exponențiale deghizate).

Tipuri de ecuații diferențiale

Există două tipuri de ecuații diferențiale. O ecuație diferențială *ordinară* (EDO) operează cu o funcție necunoscută y, depinzând de o singură variabilă x, și este o relație între diversele derivate ale lui y, cum ar fi $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ și $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$. Ecuațiile diferențiale prezentate până acum sunt ecuații diferențiale ordinare. Cu mult mai dificil, dar esențial pentru fizica matematică, este conceptul de ecuație diferențială cu *derivate parțiale* (EDP). O astfel de ecuație operează cu o funcție de *două* sau *mai multe* variabile, ca de pildă $f(x, y, t)$, unde x și y sunt coordonate în plan, iar t este timpul. EDP leagă această funcție de anumite expresii în derivatele ei parțiale în raport cu fiecare variabilă. Se folosește o nouă notație pentru a desemna derivatele în raport cu una dintre variabile, în timp

ce restul sunt ținute fixe. Astfel, $\partial x/\partial t$ indică viteza de variație a lui f în raport cu timpul, atunci când x și y sunt ținute constante. Aceasta se numește o *derivată parțială* – de unde termenul de ecuație cu derivate parțiale.

Euler a introdus EDP în 1734, iar d'Alembert s-a ocupat de ele în 1743, dar aceste studii timpurii au fost izolate și au vizat cazuri particulare. Prima mare descoperire a venit în 1746, când d'Alembert s-a întors la o veche problemă, cea a corzii de vioară care vibrează. Johannes Bernoulli cercetase în 1727 această problemă prin metoda elementelor finite, considerând vibrațiile unui număr finit de mase punctiforme plasate la distanțe egale pe o coardă de masă nulă. D'Alembert a tratat problema unei corzi continue, de densitate uniformă, aplicând calculele lui Bernoulli pentru n mase, și făcându-l apoi pe n să tindă la infinit. Astfel, el considera că o coardă continuă e alcătuită dintr-o infinitate de segmente infinitezimale de coardă, legate între ele.

Pornind de la rezultatele lui Bernoulli, care se bazau pe legea mișcării a lui Newton, și făcând anumite simplificări (de exemplu, considerând amplitudinea vibrațiilor mică), d'Alembert a ajuns la EDP

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

unde $y = y(x, t)$ este forma corzii la momentul t, ca funcție de coordonata orizontală x. Aici a este o constantă legată de tensiunea din coardă și de densitatea ei. Printr-un raționament ingenios, d'Alembert a arătat că soluția generală a acestei EDP are forma

$$y(x,t) = f(x + at) + f(x - at)$$

unde f este o funcție periodică având ca perioadă dublul lungimii corzii, iar f este impară, adică $f(-z) = -f(z)$. Această formă satisface condițiile la limită firești ca cele două capete ale corzii să nu se miște.

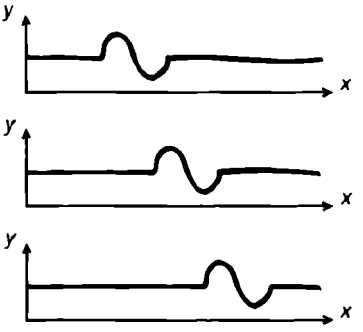
Ecuația undelor

Ecuația cu derivate parțiale a lui d'Alembert e numită astăzi *ecuația undelor*, iar soluția ei e interpretată ca suprapunerea a două unde plasate simetric, una deplasându-se cu viteza a, iar cealaltă cu viteza $-a$ (deci în sens contrar). A devenit una dintre cele mai importante ecuații din fizica matematică, fiindcă undele apar frecvent, în diferite contexte.

Euler a remarcat lucrarea lui d'Alembert și a încercat imediat s-o îmbunătățească. În 1753 el a arătat că, fără condiții la limită, soluția generală este

$$y(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

unde f şi g sunt periodice, dar nu satisfac nici o altă condiție. În particular, aceste funcții pot avea formule diferite în domenii diferite de variație a lui x, trăsătură care l-a făcut pe Euler să le numească funcții discontinue, deşi în terminologia actuală ele sunt continue, dar au primele derivate discontinue.

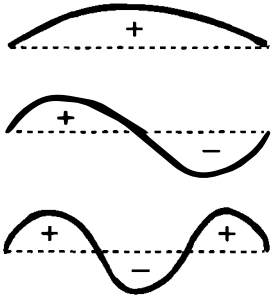


Instantanee succesive ale unei unde călătorind de la stânga la dreapta

Într-o lucrare anterioară din 1749, el a arătat (pentru simplitate, considerăm că lungimea coardei este de 1 unitate) că cele mai simple funcții periodice impare sunt funcțiile trigonometrice

$$f(x) = \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x...$$

ş.a.m.d. Aceste funcții reprezintă vibrații sinusoidale pure cu frecvențele 1, 2, 3, 4 ş.a.m.d. Soluția generală, spunea Euler, este o suprapunere a unor asemenea curbe. Curba sinusoidală fundamentală sin x este modul fundamental de vibrație, iar celelalte sunt modurile superioare – ceea ce noi numim azi armonice.

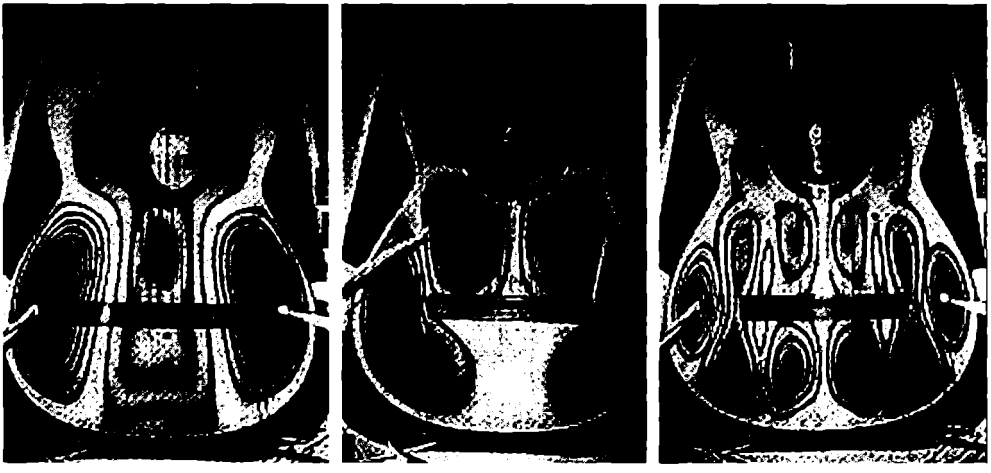


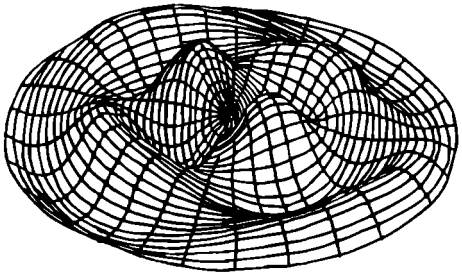
Moduri de vibrație ale unei coarde

Compararea soluției lui Euler cu cea a lui d'Alembert a condus la o criză fundamentală. D'Alembert n-a recunoscut posibilitatea funcțiilor discontinue în sensul lui Euler. Mai mult, rezultatul lui Euler părea să conțină o eroare principială, deoarece funcțiile trigonometrice sunt continue, la fel ca toate suprapunerile (finite) ale lor. Euler nu se ocupase de problema diferenței între suprapuneri finite şi infinite – pe atunci nimeni nu era cu adevărat riguros în această privință. Neputința de a face o asemenea distincție pricinuia grave neajunsuri. Disputa s-a încheiat abia odată cu cercetările lui Fourier.

Muzica, lumina, sunetul și electromagnetismul

Vechii greci ştiau că o coardă vibrantă poate produce multe note muzicale, în funcție de poziția nodurilor (adică a punctelor care se află în repaus). Pentru frecvența fundamentală, numai capetele sunt în repaus. Când coarda are un nod la mijlocul său, ea produce o notă cu o octavă mai sus; iar, cu cât sunt mai





Vibrațiile unei membrane circulare

multe noduri, cu atât mai înaltă va fi frecvența notei. Vibrațiile superioare se numesc *armonice*.

Vibrațiile coardei unei viori sunt *unde staționare* – forma coardei este aceeași în orice moment, exceptând faptul că ea este întinsă sau comprimată într-o direcție perpendiculară pe lungimea ei. Întinderea maximă este *amplitudinea* undei, care din punct de vedere fizic determină cât de tare se aude nota. Forma undelor e sinusoidală, iar amplitudinile lor variază sinusoidal cu timpul.

În 1759 Euler a extins aceste idei de la coarde la tobe. El a dedus din nou o ecuație a undelor, descriind variația în timp a membranei în direcția verticală. Interpretarea ei fizică este că accelerația unei părți mici a membranei e proporțională cu tensiunea medie exercitată asupra ei de toate părțile învecinate. Tobele diferă de coardele de vioară nu numai prin numărul de dimensiuni – membrana e bidimensională –, ci și prin faptul că au o *frontieră* mult mai interesantă. În acest domeniu frontierele au o importanță crucială. Frontiera unei tobe poate fi orice curbă închisă, iar condiția esențială e ca această frontieră să fie nemișcată. Restul membranei se poate mișca, dar marginea ei este ferm fixată.

Vechii greci știau că o coardă vibrantă poate produce multe note muzicale

Matematicienii secolului XVIII au reușit să rezolve ecuația mișcării unor tobe de diferite forme. Ei au găsit din nou că toate vibrațiile pot fi construite

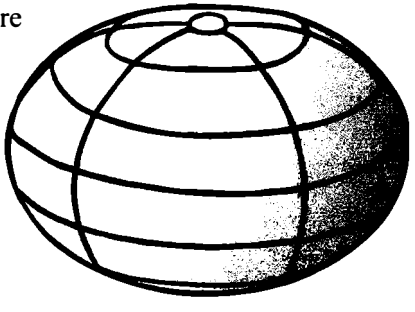
pornind de la unele mai simple, şi că acestea produc un şir caracteristic de frecvenţe. Cazul cel mai simplu e toba dreptunghiulară: vibraţiile ei cele mai simple sunt combinaţii de ondulaţii sinusoidale în cele două direcţii perpendiculare. Un caz mai dificil este cel al tobei circulare, care conduce la un tip nou de funcţii, numite *funcţii Bessel*. Amplitudinile acestor unde variază şi ele sinusoidal în timp, dar structura lor spaţială e mai complicată.

Ecuaţia undelor este extrem de importantă. Undele apar nu numai la instrumentele muzicale, ci şi în fizica luminii şi a sunetului. Euler a găsit o variantă tridimensională a ecuaţiei undelor, pe care a aplicat-o undelor sonore. Un secol mai târziu, James Clerk Maxwell a extras aceeaşi expresie matematică din ecuaţiile electromagnetismului şi a prezis existenţa undelor radio.

Atracţia gravitaţională

O altă aplicaţie importantă a ecuaţiilor cu derivate parţiale a apărut în teoria atracţiei gravitaţionale, cunoscută şi sub numele *teoria potenţialului*. Problema de la care s-a pornit era atracţia gravitaţională a Pământului, sau a oricărei alte planete. Newton considerase planetele sfere perfecte, dar forma lor e mai aproape de cea a unui elipsoid. Şi în vreme ce atracţia gravitaţională a unei sfere e aceeaşi cu a unei particule punctiforme (pentru distanţe din afara sferei), lucrul nu mai e valabil pentru elipsoizi.

Colin Maclaurin a făcut mari progrese în această direcţie într-un memoriu premiat în 1740 şi într-o carte ulterioară intitulată *Tratat despre fluxiuni*, publicată în 1742. Primul lui pas a fost să demonstreze că dacă un fluid de densitate uniformă se roteşte cu viteză uniformă, atunci forma de echilibru, sub influenţa propriei gravitaţii, este un sferoid turtit – un elipsoid de rotaţie. El a studiat apoi forţele de atracţie generate de un asemenea sferoid, cu un succes limitat. Principalul lui rezultat a fost că, dacă doi sferoizi au aceleaşi focare, iar o particulă se află fie în planul ecuatorial, fie pe axa de rotaţie, atunci forţele exercitate asupra ei de fiecare sferoid sunt proporţionale cu masele lor.



Un elipsoid

În 1743 Clairaut a continuat să lucreze la această problemă în *Théorie de la figure de la Terre*. Dar marea descoperire a fost făcută de Legendre. El a demonstrat o proprietate fundamentală, valabilă nu doar pentru sferoizi, ci pentru orice corpuri de rotaţie: dacă se cunoaşte atracţia gravitaţională în orice punct de-a lungul axei

de rotație, se poate deduce atracția în orice alt punct. Metoda lui a fost de a exprima atracția ca o integrală în coordonate sferice polare. Manevrând această integrală, i-a exprimat valoarea ca o suprapunere de armonice sferice. Acestea sunt determinate de anumite funcții speciale, numite *polinoame Legendre.* În 1784, el şi-a continuat cercetările în domeniu, demonstrând multe proprietăți fundamentale ale acestor polinoame.

Ecuația cu derivate parțiale fundamentală pentru teoria potențialului este ecuația lui Laplace, introdusă în lucrarea în cinci volume a lui Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, publicată începând cu 1799. Ecuația are forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

unde $V(x, y, z)$ este potențialul în punctul (x, y, z) din spațiu. Intuitiv, ea spune că valoarea potențialului în orice punct este media valorilor sale pe o sferă foarte mică înconjurând acel punct. Ecuația e valabilă în afara corpului: în interior, ea trebuie să fie modificată, devenind ceea ce se numeşte azi *ecuația lui Poisson.*

Căldura şi temperatura

Succesele legate de sunet şi gravitație i-au încurajat pe matematicieni să-şi îndrepte atenția spre alte fenomene fizice. Unul dintre cele mai importante a fost căldura. La începutul secolului XIX, ştiința propagării căldurii devenise un subiect extrem de important pentru practică, în principal datorită nevoilor industriei metalurgice, dar şi datorită interesului crescut pentru structura din interiorul Pământului, în particular pentru temperatura din miezul planetei. Nu există vreun mijoc direct de a măsura temperatura la o mie de kilometri sau mai mult sub suprafața Pământului, aşa încât singurele metode disponibile erau cele indirecte, iar o înțelegere a modului în care se propaga căldura prin corpuri de compoziții diferite era esențială.

În 1807 Joseph Fourier a trimis Academiei Franceze de Ştiințe o lucrare asupra propagării căldurii, dar referenții au respins-o deoarece nu era suficient de dezvoltată. Pentru a-l încuraja pe Fourier să-şi continue cercetările, Academia a făcut din propagarea căldurii subiectul marelui ei premiu din 1812. Tema fusese anunțată cu mult timp înainte, iar în 1811 Fourier şi-a revizuit ideile, le-a depus pentru premiu şi l-a câştigat. Lucrarea sa a fost însă criticată pentru lipsă de rigoare logică, iar Academia a refuzat s-o publice ca un memoriu. Iritat de această nerecunoaştere, Fourier a scris *Teoria analitică a căldurii*, pe care a publicat-o în 1822. O mare parte din lucrarea scrisă în 1811 era inclusă fără

modificări, dar exista şi material nou. În 1824 Fourier şi-a luat revanşa: a fost numit secretar al Academiei şi şi-a publicat imediat lucrarea din 1811 ca memoriu.

Primul pas al lui Fourier a fost să deducă o EDP pentru propagarea căldurii. Cu diverse ipoteze simplificatoare – corpul trebuie să fie omogen (cu aceleaşi proprietăţi peste tot) şi izotrop (nici o direcţie din interiorul său să nu se comporte diferit de oricare alta) etc., el a obţinut ceea ce numim azi *ecuaţia căldurii*, descriind variaţia în timp a temperaturii în orice punct al unui corp tridimensional. Ecuaţia căldurii e foarte asemănătoare ca formă cu ecuaţia lui Laplace şi cu ecuaţia undelor, dar derivata parţială în raport cu timpul este de ordinul unu, nu doi. Această infimă diferenţă are consecinţe uriaşe asupra matematicii ecuaţiei.

În 1824 Fourier şi-a luat revanşa: a fost numit secretar al Academiei

Existau ecuaţii similare pentru corpuri cu una sau două dimensiuni (bare şi plăci), obţinute eliminând termenul în z (pentru două dimensiuni), iar apoi şi pe cel în y (pentru una singură). Fourier a rezolvat ecuaţia căldurii pentru o bară (a cărei lungime este π) ale cărei capete sunt menţinute la o temperatură constantă, presupunând că la momentul $t = 0$ (condiţia iniţială) temperatura într-un punct x al barei este de forma

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

(expresie sugerată de calcule preliminare) şi a dedus că temperatura trebuie să fie dată de o expresie similară, dar mai complicată, în care fiecare termen se înmulţeşte cu o funcţie exponenţială convenabilă. Analogia cu armonicele ecuaţiei undelor este frapantă. Dar acolo fiecare mod dat de o funcţie sinusoidală pură oscilează nedefinit fără a-şi pierde din amplitudine, în vreme ce toate modurile sinusoidale ale distribuţiei de temperatură se amortizează exponenţial în timp, iar modurile superioare se amortizează mai rapid.

Motivul fizic pentru această diferenţă este că în ecuaţia undelor energia se conservă, aşa încât vibraţiile nu se pot amortiza, pe când în ecuaţia căldurii temperatura difuzează în întreaga bară şi se pierde la capete, fiindcă ele sunt menţinute reci.

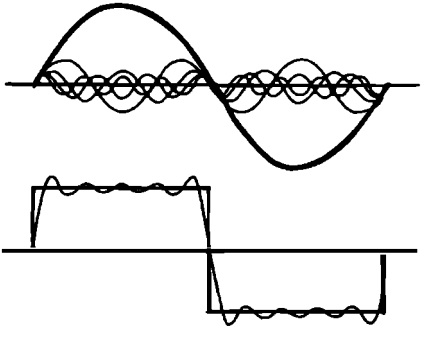
Concluzia lui Fourier a fost că, dacă putem exprima distribuţia iniţială a temperaturii printr-o serie Fourier – o serie de sinusuri şi cosinusuri ca aceea de mai sus –, atunci putem vedea imediat cum se propagă căldura prin corp odată cu trecerea timpului. Fourier a considerat evident că orice distribuţie iniţială a temperaturii poate fi exprimată în acest mod, iar de aici începeau dificultăţile, deoarece unii dintre contemporanii lui se ocupaseră câtva timp tocmai de

CUM FUNCȚIONEAZĂ SERIILE FOURIER

O funcție discontinuă tipică este *unda pătrată* S(x), care ia valorile 1 pentru $-\pi < x \leq 0$ și -1 pentru $0 < x < \pi$, și are perioada 2π. Aplicând formula lui Fourier undei pătrate obținem seria

$$S(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

Termenii se adună așa cum se vede în graficul de jos. Deși unda pătrată e discontinuă, orice aproximație este continuă, dar dreptele se construiesc pe măsură ce se adună tot mai mulți termeni, făcând ca graficul seriei Fourier să devină tot mai abrupt în jurul discontinuităților. În felul acesta, o serie infinită de funcții continue poate conduce la o discontinuitate.



Dezvoltarea Fourier a undei pătrate; sus, câteva dintre curbele sinusoidale componente; jos, suma lor.

această problemă, în legătură cu undele, și se convinseseră că era mult mai greu decât părea.

Argumentul lui Fourier pentru existența unei dezvoltări în serie de sinusuri și cosinusuri era complicat, confuz și foarte puțin riguros. El ocolea întregul edificiu al matematicii pentru a deduce, în final, o expresie simplă pentru coeficenții b_1, b_2, b_3 etc. Notând cu f(x) distribuția inițială a temperaturii, rezultatul obținut de el era

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(u)\sin(nu)\,dx$$

Euler scrisese deja această formulă în 1777, în contextul ecuației undelor pentru sunet, și o demonstrase folosind observația ingenioasă că două moduri distincte, sin $m\pi x$ și sin $n\pi x$ sunt *ortogonale*, aceasta însemnând că

$$\int_0^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx$$

este zero ori de câte ori m și n sunt întregi diferiți între ei, dar diferită de zero – egală cu $\pi/2$ – când $m = n$. Dacă presupunem că f(x) are o dezvoltare Fourier, înmulțind ambii membri cu sin nx și integrând, toți termenii, cu excepția unuia singur, se vor anula, iar termenul rămas ne dă formula pentru b_n.

Dinamica fluidelor

Nici o prezentare a ecuațiilor cu derivate parțiale ale fizicii matematice n-ar fi completă fără menționarea dinamicii fluidelor. Într-adevăr, e un domeniu de o mare importanță practică, deoarece aceste ecuații descriu curgerea apei pe lângă submarine, a aerului pe lângă avioane, ba chiar și pe lângă mașinile de Formula 1.

La ce i-au ajutat ecuațiile diferențiale

Modelul orbitelor eliptice al lui Kepler este inexact. Ar fi exact dacă în sistemul solar n-ar exista decât două corpuri, dar prezența unui al treilea corp modifică (perturbă) orbita eliptică. Deoarece planetele se află la mare distanță una de alta, aceasta nu afectează decât detaliile mișcării, iar majoritatea orbitelor rămân apropiate de elipse. Totuși Jupiter și Saturn se comportă straniu, uneori rămânând în urma locului unde ar trebui să se afle, alteori luând-o înainte. Efectul acesta e produs de forța gravitațională dintre ele, care se adaugă la cea a Soarelui.
Legea newtoniană a gravitației se aplică unui număr oarecare de corpuri, dar calculele devin foarte dificile atunci când există trei sau mai multe corpuri. În 1748, 1750 și 1752 Academia Franceză de Științe a oferit premii pentru calculul exact al mișcărilor lui Jupiter și Saturn. În 1748 Euler a folosit ecuațiile diferențiale pentru a studia modul în care gravitația lui Jupiter perturbă orbita lui Saturn, și a câștigat premiul. El a încercat din nou în 1752, dar lucrarea sa conținea importante greșeli. Totuși, ideile care stăteau la baza ei s-au dovedit utile mai târziu.

Sofia Vasilievna Kovalevskaia

1850–1891

Sofia Kovalevskaia a fost fiica unui general de artilerie, membru al nobilimii ruse. Pereții camerei sale de copil au fost acoperiți cu pagini din manuale de analiză matematică. La vârsta de 11 ani atenția i-a fost atrasă de ele și a învățat singură analiza. S-a pasionat de matematică, preferând-o oricărei alte materii. Tatăl ei a încercat s-o oprească, dar ea a mers mai departe, citind o carte de algebră pe când părinții dormeau.

Pentru a călători și a se instrui, a fost obligată să se căsătorească, dar n-a fost o căsnicie fericită. În 1869 a studiat matematica la Heidelberg, dar cum femeile nu erau admise ca studente, a trebuit să convingă universitatea să-i permită să asiste la cursuri. A dovedit un impresionant talent matematic, iar în 1871 s-a dus la Berlin, unde a studiat cu marele analist Karl Weierstrass. Iar nu i s-a permis să se înscrie ca studentă, dar Weierstrass i-a dat lecții în particular.

A făcut cercetări originale, iar în 1874 Weierstrass a spus că lucrările ei erau potrivite pentru un doctorat. Scrisese trei articole, despre EDP, funcții eliptice și inelele lui Saturn. În același an, Universitatea din Göttingen îi acordă titlul de doctor. Articolul despre EDP a fost publicat în 1875.

În 1878 a născut o fată, dar s-a întors la matematică în 1880, studiind refracția luminii. În 1883 soțul ei, de care se despărțise, s-a sinucis, iar ea a început să dedice tot mai mult timp matematicii pentru a domoli sentimentul de vinovăție. A obținut un post universitar la Stockholm și a ținut cursuri în 1884. În 1889 a devenit a treia femeie profesor la o universitate europeană, după Maria Agnesi (care nu și-a preluat niciodată postul) și fiziciana Laura Bassi. A scris aici o lucrare despre mișcarea corpurilor rigide, a participat cu ea la concursul pentru un premiu oferit de Academia de Științe în 1886 și a câștigat. Juriul a considerat că lucrarea era atât de strălucită, încât a sporit valoarea premiului. O lucrare ulterioară pe aceeași temă a fost recompensată cu un premiu al Academiei Suedeze de Științe și a determinat alegerea ei ca membră a Academiei Imperiale Ruse.

Euler a început cercetarea domeniului în 1757 deducând o EDP pentru curgerea unui fluid de vâscozitate nulă, adică unul fără „frecare internă". Ecuația rămâne realistă pentru anumite fluide, dar c prea simplă pentru a fi de mare utilitate practică. Ecuațiile unui fluid vâscos au fost deduse de

Claude Navier în 1821, iar apoi de Poisson în 1829. Ele implică diverse derivate parțiale ale vitezei fluidului. În 1845 George Gabriel Stokes a dedus aceleași ecuații din principii fizice fundamentale, motiv pentru care se numesc ecuațiile Navier–Stokes.

Ecuații diferențiale ordinare

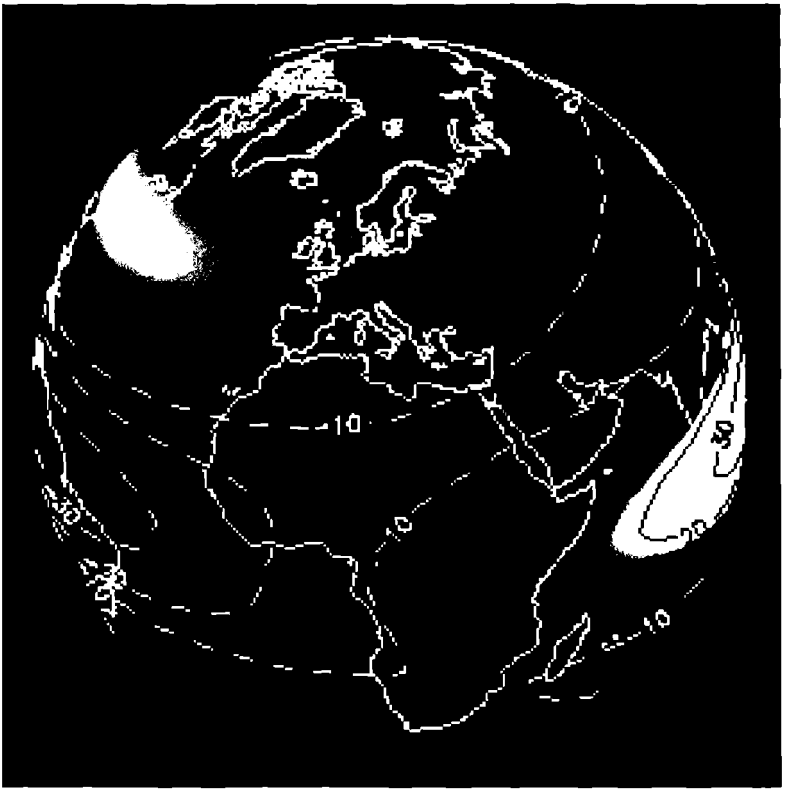
Încheiem această secțiune cu două importante contribuții la folosirea ecuațiilor diferențiale ordinare în mecanică. În 1788 Lagrange a publicat *Mecanica analitică*, subliniind cu mândrie:

> „În această carte nu veți găsi figuri. Metodele pe care le expun nu pretind nici construcții, nici argumente geometrice sau mecanice, ci numai operații algebrice, supuse unei desfășurări regulate și uniforme."

Pe atunci, capcanele argumentelor grafice deveniseră vizibile, iar Lagrange era hotărât să le evite. Astăzi desenele sunt din nou la modă, dar faptul că Lagrange a insistat asupra unei tratări formale a mecanicii a dus la o nouă unificare a domeniului, în termenii coordonatelor generalizate. Orice sistem poate fi descris folosind multe variabile diferite. De exemplu, pentru un pendul, coordonata obișnuită e unghiul la care atârnă pendulul, dar distanța sa pe orizontală față de punctul de echilibru poate fi la fel de bine folosită.

Ecuațiile mișcării arată foarte diferit în diferite sisteme de coordonate, iar lui Lagrange acest lucrul i s-a părut neelegant. El a găsit o cale de a rescrie ecuațiile de mișcare într-o formă care arată la fel în orice sistem de coordonate. Prima inovație este de a forma coordonate perechi: oricărei posibile coordonate q (cum ar fi unghiul pendulului) i se asociază coordonata corespunzând vitezei, $\dot{q}$ (viteza unghiulară a mișcării pendulului). Dacă există n coordonate ale poziției, există și n coordonate ale vitezei. În locul unei ecuații diferențiale de ordinul doi pentru poziții, Lagrange a dedus o ecuație diferențială de ordinul întâi pentru poziții și viteze. El a formulat toate acestea cu ajutorul unei cantități numită acum *lagrangean*.

Hamilton a perfecționat ideea lui Lagrange, făcând-o încă și mai elegantă. Din punct de vedere fizic, pentru a defini coordonatele suplimentare, el a folosit impulsul în locul vitezei. Matematic, el a definit o cantitate numită azi *hamiltonian*, care – pentru multe sisteme – poate fi interpretată ca energie. Cercetările teoretice în mecanică folosesc de regulă formalismul hamiltonian, care a fost extins și la mecanica cuantică.



Viteza globală a vântului și temperatura, calculate printr-o versiune extinsă a ecuațiilor Navier–Stokes

Fizica devine matematică

Principia lui Newton a impresionat prin dezvăluirea legilor matematice profunde din spatele fenomenelor naturale. Dar ce a urmat a fost încă și mai impresionant. Matematicienii au atacat întreaga panoplie a fizicii – sunetul, lumina, căldura, curgerea fluidelor, gravitația, electricitatea, magnetismul – iar de fiecare dată au găsit ecuații diferențiale care descriau fizica, deseori foarte exact.

Consecințele pe termen lung au fost remarcabile. Multe dintre cele mai importante progrese tehnologice, cum ar fi radioul, televiziunea și avioanele cu reacție, depind într-un fel sau altul de matematica ecuațiilor diferențiale. Domeniul continuă să fie intens cercetat, noi aplicații apărând aproape în fiecare zi. Putem spune pe drept cuvânt că ecuațiile diferențiale, inventate de Newton și perfecționate de urmașii săi din secolele XVIII și XIX, stau în multe privințe la baza societății în care trăim astăzi.

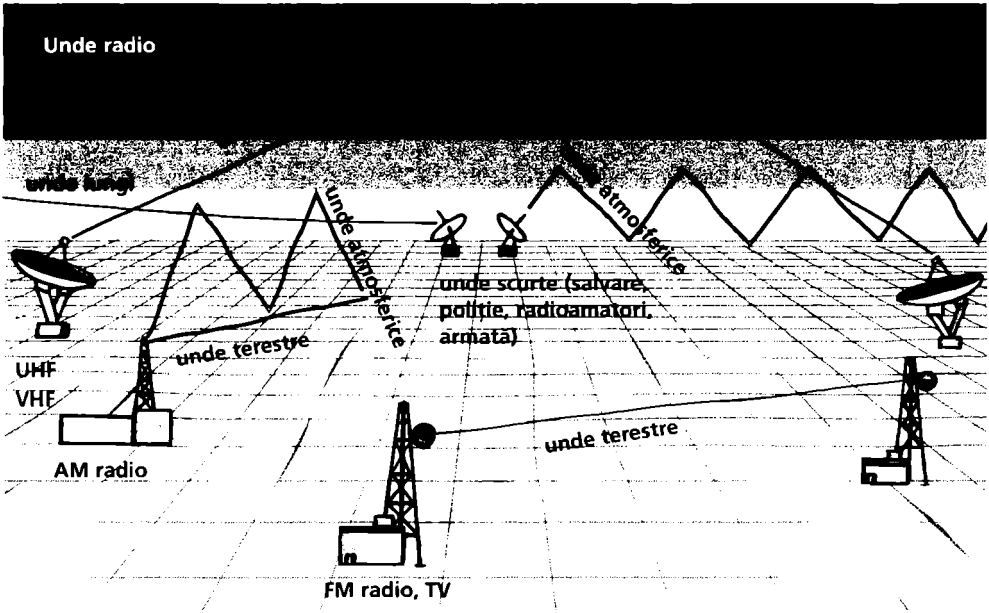
...radioul, televiziunea și avioanele cu reacție depind de matematica ecuațiilor diferențiale.

La ce ne ajută ecuațiile diferențiale

Ecuația undelor este direct legată de radio și televiziune.

Pe la 1830 Michael Faraday a efectuat experimente de electricitate și magnetism, studiind câmpul magnetic creat de un curent electric și câmpul electric creat de un magnet în mișcare. Dinamurile și motoarele electrice actuale sunt descendenții direcți ai aparaturii sale. În 1864 James Clerk Maxwell a reformulat teoriile lui Faraday ca ecuații matematice ale electromagnetismului: *ecuațiile lui Maxwell*. Acestea sunt ecuații cu derivate parțiale implicând câmpuri magnetice și electrice.

Din ecuațiile lui Maxwell rezultă imediat ecuația undelor. Calculul arată că electricitatea și magnetismul se pot deplasa împreună asemenea unei unde, cu viteza luminii. Ce se deplasează cu viteza luminii? Lumina. Așadar lumina este o undă electromagnetică. Ecuația nu impunea nici o limitare asupra frecvenței undei, iar undele luminoase ocupă un domeniu relativ restrâns de frecvențe, așa încât fizicienii au dedus că trebuie să existe și unde electromagnetice cu alte frecvențe. Heinrich Hertz a demonstrat existența fizică a unor asemenea unde, iar Guglielmo Marconi le-a aplicat într-un dispozitiv practic: radioul. A urmat o avalanșă tehnologică. Televiziunea și radarul se bazează și ele pe unde electromagnetice. La fel și navigația prin GPS (Sisteme de Poziționare Globală prin satelit), telefoanele mobile și comunicațiile *wireless* ale calculatoarelor.



Pot exista rădăcini pătrate din numere negative?

10

Matematicienii deosebesc mai multe tipuri de numere, cu proprietăți diferite. Ce contează cu adevărat nu sunt numerele individuale, ci sistemul căruia îi aparțin – societatea din care fac parte. Patru dintre sistemele de numere sunt bine cunoscute: *numerele naturale*, 1, 2, 3...; *numerele întregi*, care-l mai cuprind şi pe zero, precum şi întregii negativi; *numerele raționale*, alcătuite din fracții p/q, unde p şi q sunt întregi, iar q este nenul; *numerele reale*, prezentate de regulă ca zecimale care pot continua la nesfârşit – orice ar însemna asta – şi care reprezintă atât numerele raționale, cu zecimale periodice, cât şi numerele iraționale precum $\sqrt{2}$, e şi π, ale căror dezvoltări zecimale nu repetă niciodată acelaşi bloc de cifre.

Întregii

Numele „întreg" nu înseamnă decât neîmpărțit; celelalte nume lasă impresia că sistemele respective sunt entități rezonabile, de bun-simț – naturale, raționale şi bineînțeles reale. Aceste nume reflectă şi încurajează ideea mult timp dominantă că numerele sunt însuşiri ale lumii înconjurătoare.

Mulți cred că singurul mod de a face matematică este de a inventa noi numere. Această părere e aproape întotdeauna greşită; mare parte din matematică nu se ocupă defel cu numere, şi în orice caz scopul obişnuit este de a inventa noi teoreme, nu noi numere. Din când în când apar totuşi şi „noi numere", iar una dintre aceste invenții, aşa-numitul număr „imposibil" sau „imaginar", a schimbat complet fața matematicii, sporindu-i nemăsurat puterea. Numărul acesta a fost rădăcina pătrată din minus unu. Pentru matematicienii din trecut o asemenea idee era ridicolă, fiindcă pătratul unui număr e întotdeauna pozitiv, aşa încât numerele negative nu pot avea rădăcini pătrate. Dar, dacă am presupune că au, ce s-ar întâmpla?

Matematicienilor le-a luat mult timp să înțeleagă că numerele sunt invenții artificiale ale oamenilor, invenții eficiente în descrierea diferitelor aspecte ale naturii, dar nu *parte* a naturii, aşa cum nici un triunghi al lui Euclid sau o formulă din analiza matematică nu e parte a naturii. Matematicienii au început să-şi pună această problemă filozofică de îndată ce şi-au dat seama că numerele imaginare erau inevitabile, utile şi oarecum pe picior de egalitate cu mai familiarele numere reale.

Dificultăți cu ecuațiile cubice

Ideile matematice revoluționare sunt rareori descoperite în contextul cel mai simplu şi (privind retrospectiv) cel mai evident. Ele apar aproape întotdeauna din ceva mult mai complicat. Aşa a fost şi cu radical din minus unu. Astăzi, numărul acesta e introdus de regulă prin intermediul ecuației pătratice $x^2 + 1 = 0$, a cărei soluție e radical din minus unu – indiferent ce poate însemna ea. Printre primii matematicieni care s-au întrebat dacă ea avea vreun sens au fost algebriştii Renaşterii, care au dat de rădăcinile pătrate ale numerelor negative pe o cale surprinzător de indirectă: rezolvarea ecuațiilor cubice. Să ne amintim că del Ferro şi Tartaglia au descoperit soluțiile ecuațiilor cubice, introduse ulterior de Cardano în a lui *Ars Magna*. Cu simboluri moderne, soluția ecuației cubice $x^3 + ax = b$ este

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

Matematicienii renascentişti exprimau această soluție în cuvinte, dar procedeul era acelaşi.

Uneori formula aceasta se aplica de minune, dar alteori se izbea de dificultăți. Cardano a observat că atunci când e aplicată ecuației $x^3 = 15x + 4$, cu soluția evidentă $x = 4$, rezultatul se exprimă ca

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Această expresie părea să nu aibă sens, deoarece -121 nu are rădăcină pătrată. Derutat, Cardano i-a scris lui Tartaglia, rugându-l să-l lămurească, dar Tartaglia n-a înțeles întrebarea, iar răspunsul lui a fost complet inutil.

Un răspuns a fost dat de Rafael Bombelli în *L'Algebra*, cartea sa în trei volume tipărită la Veneția în 1572 şi la Bologna în 1579. Pe Bombelli îl nemulțumea faptul că *Ars Magna* a lui Cardano era mai degrabă obscură, şi şi-a propus să scrie una mai clară. El opera cu buclucaşa rădăcină pătrată ca şi cum ar fi fost un număr obişnuit, observând că

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

şi deducând ciudata formulă

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

Analog, Bombelli a obținut formula

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Acum el putea să scrie suma celor două rădăcini cubice ca

$$(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

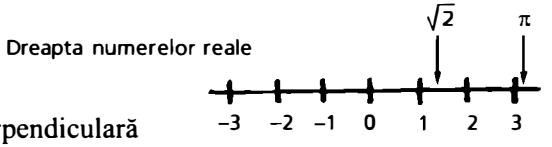
Aşadar, această stranie metodă dădea rezultatul corect, un număr întreg absolut normal, dar ea ajungea la acest rezultat manevrând cantități „imposibile".

Metoda era foarte interesantă, dar *de ce funcționa*?

Numerele imaginare

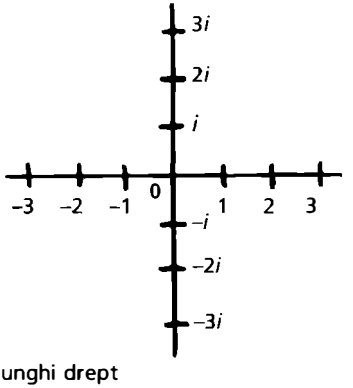
Pentru a răspunde la această întrebare, matematicienii trebuiau să ajungă la modul corect de a înțelege rădăcinile pătrate din cantitățile negative şi de a face calcule cu ele. La început, matematicieni precum Descartes şi Newton interpretau aceste numere imaginare ca pe un semn că o problemă nu are soluții. Dacă voiai să găseşti un număr al cărui pătrat era minus unu, soluția formală, radical din minus unu, era imaginară, deci nu exista nici o soluție. Dar calculul lui Bombelli arăta că numerele imaginare ascundeau mai mult decât atât. Ele puteau fi folosite pentru găsirea soluțiilor, puteau fi întâlnite atunci când *existau* soluții.

În 1673, John Wallis a inventat un mijloc simplu de a reprezenta numerele imaginare ca puncte într-un plan. El a pornit de la reprezentarea uzuală a numerelor reale pe o dreaptă, cu numerele pozitive la dreapta şi cele negative la stânga.



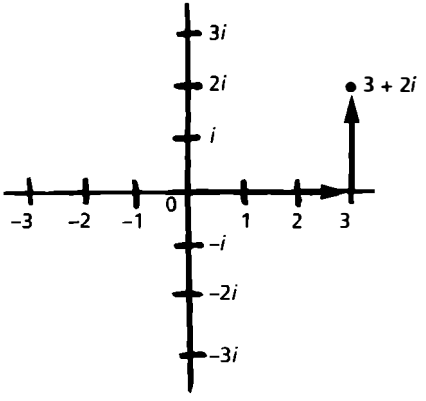
Apoi a introdus o altă dreaptă, perpendiculară pe prima, iar de-a lungul acestei noi drepte a plasat numerele imaginare.

Aceasta seamănă cu perspectiva algebrică a lui Descartes asupra geometriei plane, folosind axe de coordonate. Numerele reale alcătuiesc una din axe, iar numerele imaginare cealaltă. Wallis nu şi-a exprimat ideea chiar în această formă – versiunea lui era mai apropiată de perspectiva lui Fermat decât de a lui Descartes, dar ideea de bază e aceeaşi. Restul planului corespunde numerelor



Două exemplare ale dreptei numerelor reale, aşezate în unghi drept

Planul complex după Wessel



complexe, care constau din două părți: una reală și una imaginară. În coordonate carteziene, măsurăm partea reală de-a lungul axei reale, iar partea imaginară de-a lungul axei imaginare. Astfel, $3 + 2i$ este situat 3 unități la dreapta originii și două unități în sus.

Ideea lui Wallis rezolva problema semnificației numerelor imaginare, dar nimeni n-a observat asta. Și totuși, în subconștient, ideea lui câștiga încet teren. Cei mai mulți matematicieni nu mai erau preocupați de faptul că radical din minus unu nu putea ocupa nici o poziție pe dreapta reală, și au înțeles că se putea afla undeva în lumea mai vastă a planului complex. Unii n-au reușit să priceapă ideea: în 1758, François Daviet de Foncenex, într-un articol despre numerele imaginare, afirma că ar fi absurd să concepem că numerele imaginare alcătuiesc o dreaptă perpendiculară pe dreapta reală. Alții însă au îndrăgit-o și i-au înțeles importanța.

Ideea că un plan complex putea extinde confortabila dreaptă reală și găzdui numerele imaginare era implicită în lucrarea lui Wallis, dar nu apărea clar în prezentarea lui. Ea a fost explicitată de norvegianul Caspar Wessel în 1797. Wessel era geometru, iar principalul lui scop era să reprezinte geometria planului prin numere. Din perspectivă inversă, ideile lui puteau fi privite ca o metodă de reprezentare a numerelor complexe în termeni de geometrie plană. El a publicat însă în daneză, iar articolele lui au trecut neobservate până în secolul următor, când au fost traduse în franceză. Matematicianul francez Jean-Robert Argand a publicat în mod independent aceeași reprezentare a numerelor în 1806, iar Gauss a descoperit-o independent de ei doi în 1811.

Analiza complexă

Dacă numerele complexe n-ar fi fost utile decât în algebră, ele ar fi rămas o curiozitate intelectuală limitată la matematica pură. Dar pe măsura creșterii interesului pentru analiza matematică și a tratării ei în forme tot mai riguroase, oamenii au înțeles că o fuziune între analiza reală și numerele complexe – *analiza complexă* – era nu numai posibilă, ci și de dorit, iar pentru multe probleme, esențială.

Rădăcinile pătrate ale numerelor complexe sunt ceva mai complicate

Descoperirea a fost declanşată de studii mai vechi asupra funcțiilor complexe. Cele mai simple funcții, cum ar fi pătratul sau cubul, nu depindeau decât de operații algebrice, aşa încât funcțiile respective erau uşor de definit pentru numere complexe. Pentru a ridica la pătrat un număr complex nu aveți decât să-l înmulțiți cu el însuşi, exact procedeul pe care i l-ați aplica unui număr real. Rădăcinile pătrate ale numerelor complexe sunt ceva mai complicate, dar merită efortul: *orice* număr complex are o rădăcină pătrată. De fapt, orice număr complex nenul are exact două rădăcini pătrate, una din ele fiind egală cu cealaltă cu semn schimbat. Aşadar, adăugarea la numerele reale a unui nou număr, i, nu numai că i-a oferit o rădăcină pătrată lui -1, ci a oferit rădăcini pătrate pentru tot ce există în sistemul lărgit al numerelor complexe.

Ce se poate spune despre sinusuri, cosinusuri, funcția exponențială şi logaritm? În acest stadiu, lucrurile au început să devină foarte interesante, dar şi foarte ciudate, mai ales când s-a ajuns la logaritmi.

La fel ca însuşi i, logaritmii numerelor complexe au apărut în probleme pur reale. În 1702, Johann Bernoulli studia procesul de integrare aplicat inverselor unor funcții pătratice. El cunoştea o tehnică iscusită de a calcula aceste integrale dacă ecuația pătratică asociată avea două soluții reale, r şi s. Atunci expresia poate fi rescrisă pentru a fi integrată în termeni de „fracții simple“

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{x-s}$$

ceea ce conduce la integrala

$$A \log (x-r) + B \log (x-s)$$

Ce se întâmplă însă dacă ecuația pătratică are rădăcini complexe? Cum putem integra, de exemplu, inversa lui $x^2 + 1$? Bernoulli şi-a dat seama că odată definită algebra complexă, artificiul descompunerii în fracții simple continuă să funcționeze, dar r şi s sunt acum numere complexe. Astfel, de exemplu,

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1/2}{x+i} + \frac{1/2}{x-i}$$

iar integrala acestei funcții ia forma

$$\tfrac{1}{2} \log (x+i) + \tfrac{1}{2} \log (x-i)$$

Acest ultim pas nu era complet satisfăcător, deoarece pretindea o definiție a logaritmului dintr-un număr complex. Era oare cu putință așa ceva?

Bernoulli credea că da, și s-a apucat să-și folosească noua idee cu excelente rezultate. Leibniz a mers și el în aceeași direcție, dar detaliile matematice nu erau tocmai simple. Pe la 1712 cei doi erau antrenați într-o dispută asupra unei trăsături fundamentale a acestei abordări. Uitând pentru moment de numerele complexe – ce era logaritmul unui număr *real negativ*? Bernoulli credea că logaritmul unui număr real negativ trebuie să fie real; Leibniz insista că el era complex. Bernoulli avea un fel de demonstrație pentru afirmația sa: folosind formalismul obișnuit al analizei, ecuația

$$\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$$

putea fi integrată, dând

$$\log(-x) = \log x$$

Dar Leibniz nu se lăsa convins, și credea că integrarea era corectă doar pentru x real pozitiv.

Această controversă a fost tranșată de Euler în 1749, iar dreptatea a fost de partea lui Leibniz. Bernoulli, spunea Euler, uitase că orice integrare implică o constantă arbitrară. Ceea ce Bernoulli ar fi trebuit să deducă era

$$\log(-x) = \log(x) + c$$

pentru o anumită constantă c. Care era această constantă? Dacă logaritmii numerelor negative (sau complexe) se comportau ca logaritmii numerelor reale pozitive, atunci ar trebui să fie adevărat că

$$\log(-x) = \log(-1 \times x) = \log(-1) + \log x$$

așa încât $c = \log(-1)$. Euler a început o serie de calcule care au condus către o formă mai explicită pentru c. Mai întâi a găsit un mijloc de a opera cu diverse formule conținând numere complexe și a dedus o relație între funcțiile trigonometrice și exponențială:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

formulă care fusese anticipată în 1714 de Roger Cotes. Punând $\theta = \pi$, Euler a obținut minunatul rezultat

$$e^{i\pi} = -1$$

legând între ele cele două constante matematice e și π. Este remarcabil faptul că există o asemenea relație, și încă mai remarcabil că e atât de simplă. Această formulă e considerată „cea mai frumoasă formulă a tuturor timpurilor".

Luând logaritmul, deducem imediat că

$$\log(-1) = i\pi$$

dezvăluind secretul constantei c de mai sus: ea este $i\pi$. Este deci imaginară, aşa încât Leibniz avea dreptate, iar Bernoulli se înşelase.

Exista însă o urmare, iar ea a deschis cutia Pandorei. Dacă punem $\theta = 2\pi$, obținem

$$e^{2i\pi} = 1$$

Deci $\log(1) = 2i\pi$. Atunci ecuația $x = x \times 1$ implică

$$\log x = \log x + 2i\pi$$

de unde deducem că, pentru orice întreg n,

$$\log x = \log x + 2ni\pi$$

La prima vedere, relația nu are sens – de aici pare să rezulte că $2ni\pi = 0$ pentru orice n. Există însă o interpretare care are sens. În numere complexe, funcția logaritmică e multiformă. Într-adevăr, excluzând cazul când numărul complex z este zero, funcția $\log z$ poate lua o infinitate de valori distincte. (Când $z = 0$, valoarea $\log 0$ nu e definită.)

La ce i-au ajutat numerele complexe

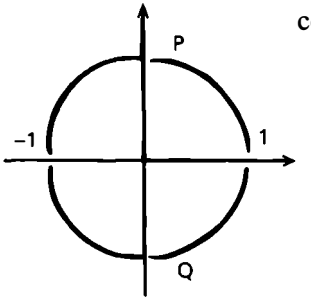
Părțile reală şi imaginară ale unei funcții complexe satisfac ecuațiile Cauchy–Riemann, care sunt strâns legate de ecuațiile cu derivate parțiale ale gravitației, electricității, magnetismului şi ale anumitor tipuri de curgere fluidă în plan. Această legătură a făcut posibilă rezolvarea multor ecuații ale fizicii matematice – dar numai pentru sisteme bidimensionale.

Câmpul magnetic al unei bare magnetice, pus în evidență de pilitura de fier: analiza complexă poate fi folosită pentru a calcula asemenea câmpuri

Matematicienii erau familiarizați cu funcții care puteau lua mai multe valori distincte, rădăcina pătrată fiind exemplul cel mai simplu: aici, chiar și un număr real posedă două rădăcini pătrate distincte, una pozitivă, alta negativă. Dar un număr infinit de valori? Asta era foarte ciudat.

Teorema lui Cauchy

Ce a încins spiritele a fost descoperirea că se putea face analiză cu funcții complexe și că teoria obținută era elegantă și utilă. Atât de utilă, încât fundamentele logice ale ideii au încetat să mai fie un subiect relevant. Când un lucru funcționează și simți că ai nevoie de el, în general încetezi să te mai întrebi dacă are sens.



Două drumuri distincte *P* și *Q* de la –1 la 1 în planul complex

Apariția analizei complexe pare să fi fost o decizie conștientă a comunității matematice – o generalizare evidentă și obligatorie –, iar orice matematician cât de cât curios voia să vadă ce iese de aici. În 1811, Gauss îi scrie unui prieten, astronomul Friedrich Bessel, dezvăluindu-i că își reprezenta numerele complexe ca puncte în plan. El menționa și alte rezultate, mai profunde, iar între ele o teoremă fundamentală, pe care se bazează întreaga analiză complexă. Astăzi se numește teorema lui Cauchy, deoarece a fost publicată de Cauchy, dar în lucrările nepublicate ale lui Gauss ideea ei apare cu mult înainte.

Această teoremă se referă la integralele definite ale funcțiilor complexe, adică expresii de forma

$$\int_a^b f(z)\,dz$$

unde a și b sunt numere complexe. În analiza reală această expresie poate fi evaluată găsind o primitivă $F(z)$ a lui $f(z)$, adică o funcție $F(z)$, astfel încât derivata ei $dF(z)/dz = f(z)$. Atunci integrala definită este $F(b) - F(a)$. În particular, valoarea ei depinde numai de capetele a și b, nu de felul în care ne mișcăm de la unul la altul.

Analiza complexă, spunea Gauss, e diferită. Aici valoarea integralei poate depinde de *drumul* pe care variabila z îl urmează de la a la b. Deoarece numerele complexe formează un plan, geometria lor e mai bogată decât cea a dreptei reale, iar în privința asta bogăția suplimentară contează.

Să presupunem, de exemplu, că integrăm $f(z) = 1/z$ de la $a = -1$ la $b = 1$.

Augustin-Louis Cauchy

1789–1857

Augustin-Louis Cauchy s-a născut la Paris într-o vreme de tulburări politice. Laplace și Lagrange erau prieteni de familie, așa încât Cauchy s-a întâlnit cu matematica superioară de la o vârstă fragedă. A urmat École Polytechnique, absolvind-o în 1807. În 1810 a efectuat lucrări inginerești la Cherbourg, în pregătirea invaziei Angliei plănuite de Napoleon, dar a continuat să reflecteze asupra matematicii, citind *Mecanica cerească* a lui Laplace și *Teoria funcțiilor* a lui Lagrange.

A căutat, fără succes, să obțină un post academic, dar a continuat să lucreze în matematică. Faimosul lui articol despre integralele complexe, care a întemeiat analiza complexă, a apărut în 1814, și el a căpătat în fine un post academic, devenind un an mai târziu profesor asistent la École Polytechnique. A fost perioada lui de maximă creativitate în matematică, iar un articol despre unde i-a adus premiul Academiei de Științe pe 1816. A continuat să dezvolte analiza complexă, iar în *Lecții de calcul diferențial* a dat prima definiție explicită a unei funcții complexe.

După revoluția din 1830 Cauchy a stat pentru scurt timp în Elveția, apoi, în 1831, a devenit profesor de fizică teoretică la Torino. Despre cursurile sale se spunea că erau haotice. Pe la 1833 a ajuns la Praga, dând lecții nepotului lui Carol X, dar prințului nu-i plăceau matematica și fizica, iar Cauchy își ieșea deseori din sărite. S-a întors la Paris în 1832, redobândindu-și postul de la Academie, dar n-a mai obținut titlul universitar până la detronarea lui Ludovic Filip, în 1848. A publicat în total 789 de articole de cercetare în matematică.

Dacă drumul parcurs este un semicerc P situat deasupra axei reale, integrala este egală cu $-\pi i$. Dar dacă drumul este un semicerc Q situat sub axa reală, atunci integrala este egală cu πi. Cele două valori sunt diferite, iar diferența este $2\pi i$.

Această diferență, spunea Gauss, apare deoarece funcția $1/z$ se comportă rău. Ea devine infinită în interiorul regiunii înconjurate de cele două drumuri. Anume, în $z = 0$, care este centrul cercului format de cele două drumuri. „Dar dacă lucrul acesta nu se întâmplă [...] susțin", îi scria Gauss lui Bessel, „că integrala are o singură valoare chiar dacă e calculată pe drumuri diferite, cu condiția ca [funcția] să nu devină infinită în spațiul înconjurat de cele două

drumuri. Aceasta e o teoremă foarte frumoasă, a cărei demonstrație o voi da la momentul potrivit." Dar n-a făcut-o niciodată.

Teorema a fost în schimb redescoperită și publicată de Augustin-Louis Cauchy, adevăratul întemeietor al analizei complexe. Poate că Gauss a avut ideea ei, dar ideile sunt inutile dacă nimeni nu află de ele. Cauchy și-a publicat rezultatul. De fapt, Cauchy publica întruna. Se spune că regula, valabilă și azi, după care revista *Comptes Rendus de l'Académie Française* nu acceptă articole mai lungi de patru pagini a fost anume introdusă pentru a-l opri pe Cauchy s-o mai umple cu imensa lui producție. Dar după ce regula a fost introdusă, Cauchy s-a apucat să scrie o puzderie de articole scurte. Din pana lui prolifică, liniile generale ale analizei complexe au prins repede contur. Iar ea este o teorie mai simplă, mai elegantă și în multe privințe mai completă decât analiza reală, de unde a pornit întreaga idee.

De exemplu, în analiza reală o funcție poate fi diferențiabilă, iar derivata ei nu. Ea poate fi diferențiabilă de 23 de ori, dar nu de 24 de ori. Nici unul dintre aceste lucruri neplăcute nu se poate întâmpla în analiza complexă. Dacă o funcție e diferențiabilă, atunci ea poate fi diferențiată de ori de câte ori doriți; în plus, ea are o reprezentare în serie de puteri. Motivul – strâns legat de Teorema lui Cauchy și probabil folosit în demonstrația necunoscută a lui Gauss – este că pentru a fi diferențiabilă, o funcție trebuie să satisfacă niște condiții extrem de restrictive, numite *condițiile Cauchy–Riemann*. Aceste ecuații conduc direct la rezultatul lui Gauss că integrala între două puncte poate depinde de drumul ales – sau, după cum a observat Cauchy, integrala pe un drum închis poate să nu fie zero. Ea este zero cu condiția ca funcția respectivă să fie diferențiabilă (deci, în particular, să nu fie infinită) în toate punctele din interiorul drumului.

Exista chiar o teoremă – teorema reziduurilor – care dădea valoarea unei integrale de-a lungul unui drum închis, arătând că ea depinde numai de punctele în care funcția devenea infinită și de comportarea ei în aceste puncte. Pe scurt, întreaga structură a unei funcții complexe este determinată de singularitățile ei – punctele în care ea se comportă rău. Iar cele mai importante singularități ale ei sunt *polii* – punctele unde ea devine infinită.

Rădăcina pătrată a lui minus unu i-a intrigat pe matematicieni timp de secole. Deși un asemenea număr părea să nu existe, el continua să apară în calcule. Și existau indicii că noțiunea aceasta ar putea avea un anume sens, deoarece putea fi folosită pentru a obține rezultate perfect valide care nu implicau extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr negativ.

Pe măsură ce această cantitate imposibilă era folosită cu tot mai mult succes, matematicienii au început s-o accepte ca pe un instrument util. Statutul

La ce ne ajută numerele complexe

În prezent numerele complexe sunt larg folosite în fizică și inginerie. Un exemplu simplu apare în studiul oscilațiilor (mișcări care se repetă periodic), cum ar fi mișcările unei clădiri la un cutremur de pământ, vibrațiile autoturismelor și transmiterea curentului electric alternativ.

Tipul fundamental de oscilație este de forma a cos ωt, unde t este timpul, a este amplitudinea oscilației iar ω este frecvența ei. Se dovedește că e convenabil să rescriem formula ca partea reală a funcției complexe $e^{i\omega t}$. Folosirea numerelor complexe conduce la o simplificare a calculelor deoarece funcția exponențială e mai simplă decât cosinusul. De aceea inginerii preferă să lucreze cu exponențiale complexe și să revină la partea reală doar la sfârșitul calculelor.

Numerele complexe determină și stabilitatea stărilor staționare ale sistemelor dinamice, și sunt larg folosite în teoria controlului. Acest domeniu se ocupă cu metodele de stabilizare a sistemelor care altminteri ar deveni instabile. Un exemplu e folosirea comandată de calculator a suprafețelor de control mobile pentru stabilizarea zborului unei navete spațiale. Fără această aplicație a analizei complexe, naveta spațială ar zbura ca o cărămidă.

ei a rămas incert până când a devenit limpede că există o extensie logic coerentă a sistemului tradițional al numerelor reale, în care radical din minus unu este un nou tip de cantitate – dar unul care se supune tuturor legilor standard ale aritmeticii.

Din punct de vedere geometric, numerele reale alcătuiesc o dreaptă, iar numerele complexe un plan; dreapta reală e una din cele două axe ale planului. Din punct de vedere algebric, numerele complexe nu sunt decât perechi de numere reale, cu niște formule specifice pentru adunarea sau înmulțirea perechilor.

Acceptate acum drept cantități perfect raționale, numerele complexe s-au răspândit cu rapiditate în întreaga matematică deoarece simplificau calculele, evitând necesitatea de a considera separat numerele pozitive și cele negative. În această privință, există o analogie între ele și numerele negative, a căror inventare a eliminat nevoia de a considera separat adunarea și scăderea. În prezent, numerele complexe și analiza funcțiilor complexe sunt intens folosite ca o tehnică indispensabilă în practic toate ramurile științei, ingineriei și matematicii.

11

Reconstrucția analizei

Pe la 1800 matematicienii şi fizicienii transformaseră analiza matematică într-un instrument indispensabil în studiul lumii naturale, iar problemele apărute din această legătură au condus la o mulțime de noi concepte şi metode – de exemplu, metode de rezolvare a ecuațiilor diferențiale – care au făcut din analiză unul dintre cele mai bogate şi mai fierbinți domenii din întreaga matematică. Frumusețea şi puterea analizei deveniseră de necontestat. Şi totuşi, criticile episcopului Berkeley la adresa fundamentelor ei logice rămăseseră fără răspuns, iar, pe măsură ce erau abordate subiecte tot mai sofisticate, întregul edificiu începea să pară şubred. Utilizarea nesăbuită a seriilor infinite, fără a acorda atenție semnificației lor, dusese deopotrivă la noi descoperiri şi la absurdități. Bazele analizei Fourier erau inexistente, iar diverşi matematicieni pretindeau că demonstraseră teoreme contradictorii. Cuvinte ca „infinitezimal" erau aruncate fără a fi definite; paradoxuri logice se întâlneau la tot pasul; chiar şi semnificația cuvântului „funcție" se afla în dispută. Era limpede că această situație nu se mai putea prelungi.

Punerea ei la punct necesita o minte limpede şi voința de a înlocui intuiția prin precizie, chiar şi în detrimentul accesibilității. Principalele personaje au fost Bernard Bolzano, Augustin-Louis Cauchy, Niels Abel, Pierre Dirichlet şi, mai presus de toți, Karl Weierstrass. Grație eforturilor lor, pe la 1900 chiar şi cele mai complicate calcule cu serii, limite, derivate şi integrale puteau fi efectuate sigur, precis şi fără paradoxuri. Un nou domeniu lua naştere: analiza. Calculul diferențial inventat de Leibniz şi Newton a rămas unul dintre aspectele esențiale ale analizei, dar concepte mai subtile şi mai profunde, cum ar fi limitele şi continuitatea, au căpătat o prioritate logică, susținând ideile calculului diferențial. Infinitezimalele au fost complet excluse.

Fourier

Înainte ca Fourier să-şi spună cuvântul, matematicienii erau destul de siguri că ştiu ce înseamnă o funcţie. Era un fel de procedeu, f, care lua un număr, x, şi producea un alt număr, $f(x)$. Care sunt numerele x admisibile depinde de f. Dacă, de exemplu, $f(x) = 1/x$, atunci x trebuie să fie nenul. Dacă $f(x) = \sqrt{x}$ şi lucrăm cu numere reale, atunci x trebuie să fie pozitiv. Dar atunci când erau presaţi să dea o definiţie, matematicienii deveneau vagi.

Sursa dificultăţilor, ne dăm seama noi astăzi, era că se luptau cu mai multe trăsături diferite ale noţiunii de funcţie – nu doar că e o regulă ce asociază unui număr x un alt număr $f(x)$, ci şi proprietăţile pe care le are regula: continuitate, diferenţiabilitate, capacitatea de a fi reprezentată printr-un anumit tip de formulă ş.a.m.d.

În particular, ei nu ştiau prea bine cum să trateze funcţiile discontinue, de exemplu

$$f(x) = 0 \text{ dacă } x \leq 0,\ f(x) = 1 \text{ dacă } x > 0$$

Această funcţie sare brusc de la 0 la 1 atunci când x trece prin 0. Motivul evident al saltului era schimbarea formulei: de la $f(x) = 0$ la $f(x) = 1$, iar acesta părea să fie singurul mod în care poate apărea saltul. Existenţa unei formule unice părea să elimine automat asemenea salturi, aşa încât o mică variaţie a lui x provoca o mică variaţie a lui $f(x)$.

Altă sursă de dificultate erau funcţiile complexe, unde – aşa cum am văzut – funcţiile naturale precum rădăcina pătrată iau două valori, iar logaritmii iau o infinitate de valori. Evident, logaritmul trebuie să fie o funcţie, dar atunci când există *o infinitate de valori*, care e regula pentru a-l obţine pe $f(z)$ din z? Păreau să existe o infinitate de reguli, toate la fel de valabile. Pentru ca aceste dificultăţi conceptuale să fie depăşite, matematicienii trebuiau să le înţeleagă în profunzime. Fourier a fost acela care a dat lovitura de graţie prin uimitoarele lui idei despre scrierea *oricărei* funcţii ca o serie infinită de sinusuri şi cosinusuri, dezvoltată în studiul său privind propagarea căldurii.

Fourier a fost acela care a dat lovitura de graţie...

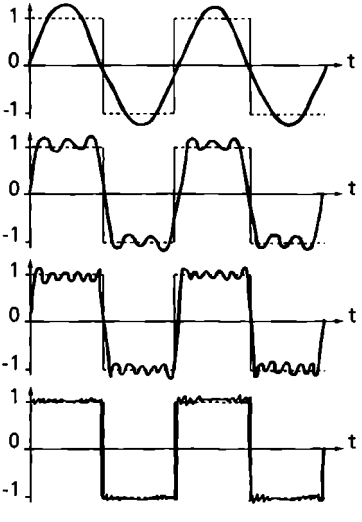
Intuiţia fizică îi spunea lui Fourier că metoda sa trebuia să fie într-adevăr foarte generală. Experimental, ne putem imagina că jumătate dintr-o bară metalică e ţinută la temperatura de 0 grade, iar cealaltă jumătate la 10 sau 50 de grade. Fizica nu pare să se sinchisească de funcţiile discontinue ale căror formule se schimbă brusc. Oricum, *fizica nu operează cu formule*. Noi ne folosim de formule pentru a modela realitatea fizică, dar asta nu e decât o

tehnică, e modul în care ne place nouă să gândim. Firește că temperatura se va da peste cap la joncțiunea celor două zone, dar modelele matematice sunt întotdeauna aproximări ale realității fizice. Metoda seriilor trigonometrice a lui Fourier, aplicată unei funcții discontinue de acest tip, părea să dea rezultate absolut rezonabile. Barele de oțel netezeau într-adevăr distribuția temperaturii, așa cum arăta ecuația căldurii rezolvată cu ajutorul seriilor trigonometrice. În *Teoria analitică a căldurii*, Fourier o spune limpede: „În general, funcția $f(x)$ reprezintă o succesiune de valori sau de ordonate, toate arbitrare. Noi nu presupunem că aceste ordonate se supun unei legi comune. Ele se succedă într-o manieră oarecare."

Îndrăznețe cuvinte; din păcate, argumentele lui nu echivalau cu o demonstrație matematică. Ele erau încă și mai confuze decât raționamentele lui Euler sau Bernoulli. În plus, dacă Fourier avea dreptate, atunci din serie rezulta o lege comună pentru funcțiile discontinue. Funcția de mai sus, cu valorile 0 și 1, are o rubedenie periodică, *unda pătrată*. Iar aceasta din urmă are o unică serie Fourier, una destul de drăguță, care funcționează la fel de bine în regiunile în care funcția e 0 și în cele în care e 1. Astfel, o funcție care pare să fie reprezentată prin două legi diferite poate fi rescrisă în termenii unei singure legi.

Încetul cu încetul, matematicienii secolului XIX au început să separe diversele teme conceptuale din acest dificil domeniu. Una dintre ele era *semnificația* termenului „funcție". Alta erau diversele moduri de a *reprezenta* o funcție – printr-o formulă, o serie de puteri, o serie Fourier etc. A treia era legată de *proprietățile* funcției, iar a patra de reprezentările care *garantau* diversele proprietăți. Un polinom, de exemplu, definește o funcție continuă, ceea ce nu părea să fie cazul cu o serie Fourier.

Analiza Fourier a devenit repede instrumentul de testare a ideilor privind noțiunea de funcție. Aici problemele ieșeau cel mai bine în relief, iar distincțiile tehnice ezoterice se dovedeau a fi importante. De altminteri, în 1837, Dirichlet a introdus noțiunea modernă de funcție într-un articol despre seriile Fourier. El era de acord cu Fourier: o variabilă y este o funcție de o altă variabilă x dacă pentru fiecare valoare a lui x



Unda pătrată și câteva dintre aproximările ei Fourier

(dintr-un anumit domeniu) există o *unică* valoare y. Dirichlet spune explicit că nu era nevoie de vreo lege sau de vreo formulă: e suficient ca y să fie specificat printr-un şir bine definit de operaţii matematice aplicate lui x. Ceea ce la vremea respectivă trebuie să fi părut un exemplu extrem este „unul pe care-l dăduse anterior", în 1829: o funcţie $f(x)$ luând o valoare fixată când x e raţional, şi o valoare diferită când x e iraţional. Această funcţie e discontinuă în orice punct. (În prezent astfel de funcţii sunt considerate relativ blânde; există comportări mult mai rele.)

Pentru Dirichlet, rădăcina pătrată nu era o funcţie luând două valori, ci o pereche de funcţii cu o singură valoare. Pentru un x real, este firesc – dar nu esenţial – să considerăm rădăcina pătrată pozitivă una din ele, iar rădăcina pătrată negativă cealaltă. Pentru numere complexe nu există alegeri fireşti evidente, deşi sunt lucruri pe care le putem face pentru a ne uşura viaţa.

Funcţii continue

De-acum matematicienii au început să-şi dea seama că, deşi formulau deseori definiţii ale termenului „funcţie", aveau obiceiul de a presupune proprietăţi suplimentare care nu rezultau din definiţie. De exemplu, ei presupuneau că orice formulă rezonabilă, cum ar fi un polinom, definea o funcţie continuă. Dar nu demonstraseră nicicând acest lucru şi nici nu-l puteau demonstra, pentru că nu definiseră ce înseamnă „continuu". Întregul domeniu era impregnat de intuiţii vagi, în cea mai mare parte greşite.

Cel care a făcut primul pas serios spre ieşirea din această harababură a fost un preot, filozof şi matematician din Boemia, pe nume Bernhard Bolzano. El a aşezat cea mai mare parte a conceptelor fundamentale ale analizei pe baze logice solide, principala excepţie fiind că nu punea la îndoială existenţa numerelor reale. Susţinea că infinitezimalele şi numerele infinit mari nu există, deci nu pot fi folosite, oricât de sugestive ar fi. A dat prima definiţie a funcţiilor continue: f este continuă dacă diferenţa $f(x + a) - f(x)$ poate fi făcută oricât de mică alegând un a suficient de mic. Matematicienii dinaintea lui spuneau de regulă ceva de genul: „Dacă a e infinitezimal, atunci $f(x + a) - f(x)$ este infinitezimal." Dar, pentru Bolzano, a nu era decât un număr ca oricare altul. Ideea lui era că atunci când specifici cât de mică vrei să fie diferenţa $f(x + a) - f(x)$, trebuie să specifici o valoare convenabilă pentru a. Nu e nevoie ca *aceeaşi* valoare să funcţioneze în toate cazurile.

Astfel, de exemplu, $f(x) = 2x$ este continuă, deoarece $2(x + a) - 2x = 2a$. Dacă vrem ca $2a$ să fie mai mic decât un anumit număr, să zicem 10^{-10}, atunci

trebuie să-l facem pe a mai mic decât $10^{-10}/2$. Dacă alegem o funcție mai dificilă, de pildă $f(x) = x^2$, atunci detaliile sunt puțin complicate de faptul că valoarea convenabilă a lui a depinde atât de x, cât și de mărimea aleasă, 10^{-10}, dar orice matematician o poate găsi în câteva minute. Folosind această definiție, Bolzano a *demonstrat* – pentru prima oară – că un polinom este o funcție continuă. Dar, vreme de 50 de ani, nimeni nu a băgat de seamă. Bolzano își publicase cercetările într-o revistă pe care practic nici un matematician n-o citea. În aceste zile ale Internetului e greu de imaginat cât de sărace erau comunicațiile acum 50 de ani, ca să nu mai vorbim de acum 180.

...treptat ordinea a răsărit din haos.

În 1821 Cauchy a spus cam același lucru, dar folosind o terminologie ușor derutantă. Definiția continuității unei funcții f dată de el era că $f(x)$ și $f(x + a)$ diferă printr-o cantitate infinitezimală ori de câte ori a este infinitezimal, care la prima vedere seamănă cu vechea abordare lipsită de rigoare. Dar pentru Cauchy infinitezimal nu însemna un anume număr care să fie cumva infinit de mic, ci un șir mereu descrescător de numere. De exemplu, șirul 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 etc. este infinitezimal în sensul lui Cauchy, dar fiecare dintre numerele care-l alcătuiesc, de pildă 0,0001, nu este decât un număr real obișnuit – mic, poate, dar nu infinit de mic. Ținând cont de terminologie, vedem că noțiunea de continuitate a lui Cauchy este exact aceeași cu a lui Bolzano.

Un alt critic al gândirii confuze despre procesele infinite a fost Abel, care se plângea că oamenii folosesc seriile infinite fără să se întrebe dacă suma lor are vreun sens. Criticile lui și-au atins ținta și treptat ordinea a răsărit din haos.

Limite

Ideile lui Bolzano au declanșat aceste progrese. El a făcut posibilă definirea limitei unui șir infinit de numere, iar de aici, a unei serii, care e suma unui șir infinit. În particular, formalismul lui implica faptul că

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

este, continuată la infinit, o sumă cu sens, iar valoarea ei este exact 2. Nici cu o cantitate infinitezimală mai puțin, ci exact 2.

Pentru a înțelege mecanismul, să presupunem că avem un șir infinit de numere

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

La ce i-a ajutat analiza

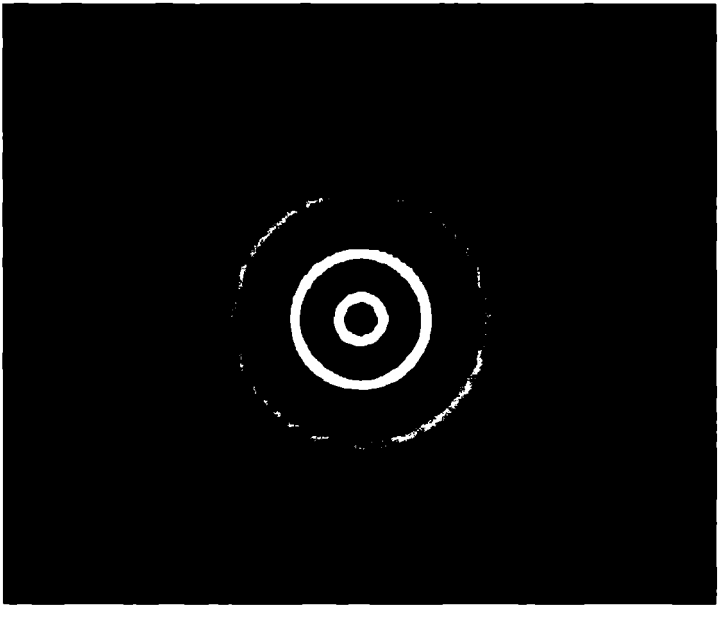
Fizica matematică a secolului XIX a condus la descoperirea mai multor ecuații diferențiale importante. În absența calculatoarelor de mare viteză, matematicienii timpului au inventat noi funcții speciale pentru a rezolva aceste ecuații, funcții folosite și astăzi. Un exemplu este *ecuația Bessel*, dedusă mai întâi de Bernoulli și generalizată de Bessel. Ea are forma

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - k^2)y = 0$$

iar funcțiile elementare, cum ar fi exponențialele, sinusurile, cosinusurile și logaritmii, nu oferă vreo soluție a ei.

Putem însă folosi analiza pentru a găsi soluții sub forma unei serii de puteri. Seria de puteri determină noi funcții, *funcțiile Bessel*. Cele mai simple funcții Bessel sunt notate $J_k(x)$, dar există și altele. Seria de puteri permite calculul lui $J_k(x)$ cu o precizie oricât de mare.

Funcțiile Bessel apar în mod natural în multe probleme legate de cercuri și cilindri, cum ar fi vibrațiile unei tobe circulare, propagarea undelor electromagnetice într-un ghid de unde cilindric, și în fizica laserilor.



Intensitatea unui fascicul laser, descrisă prin funcția Bessel $J_1(x)$

Spunem că a_n tinde spre o limită a atunci când n tinde la infinit dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr N astfel încât diferența dintre a_n și a este mai mică decât ε atunci când $n > N$. (Simbolul ε, folosit prin tradiție, este litera grecească epsilon.) Observați că toate numerele din această definiție sunt finite – nu există infinitezimale sau infiniți.

Pentru a însuma seria infinită de mai sus, considerăm sumele finite

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

și așa mai departe. Diferența dintre a_n și 2 este $1/2^n$. Pentru a o face mai mică decât ε, luăm $n > N = \log_2(1/\varepsilon)$.

O serie care are o sumă finită se numește *convergentă*. O sumă infinită se definește ca limita șirului de sume finite, obținute prin adăugarea tot mai multor termeni. Dacă limita aceasta există, seria e convergentă. Derivatele și integralele nu sunt decât diverse tipuri de limite. Ele există – adică au sens matematic – dacă limitele respective sunt finite. Limitele, așa cum susținea Newton, sunt cele de care *se apropie* anumite cantități atunci când un alt număr se apropie de infinit sau de zero. Numărul nu trebuie să *atingă* infinitul sau zero.

Întreaga analiză matematică se sprijinea acum pe fundamente solide. Partea neplăcută era că ori de câte ori foloseam un proces de trecere la limită, trebuia să ne asigurăm că e convergent. Cea mai bună cale de a o face era să demonstrăm teoreme tot mai generale despre tipurile de funcții *continue*, *diferențiabile* sau *integrabile* și despre tipurile de șiruri sau de serii care converg. E tocmai calea urmată de analiză, iar acesta e motivul pentru care nu ne mai preocupă dificultățile semnale de episcopul Berkeley. Este și motivul pentru care nu mai discutăm în contradictoriu în legătură cu seriile Fourier: știm când converg, când nu converg și *în ce sens* converg ele. Există câteva variațiuni pe tema fundamentală, iar pentru seriile Fourier trebuie să le alegem pe cele potrivite.

Seriile de puteri

Weierstrass a înțeles că pentru numere complexe sunt valabile aceleași idei ca pentru numere reale. Orice număr complex $z = x + iy$ are o valoare absolută $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ care, după Teorema lui Pitagora, este distanța de la origine la z în planul complex. Dacă măsurăm o expresie complexă după valoarea ei absolută, atunci noțiunile de limită, serie și așa mai departe din analiza reală, așa cum au fost ele formulate de Bolzano, pot fi imediat transferate la analiza complexă.

Weierstrass a observat că un anume tip de serie infinită părea deosebit de util. El se numește serie de puteri și arată ca un polinom de grad infinit:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

unde coeficienții a_n sunt numere precizate. Weierstrass a început un imens program de cercetare având drept scop întemeierea întregii analize complexe pe seriile de puteri, iar programul a fost încununat de succes.

De exemplu, putem defini funcția exponențială prin

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots$$

unde numerele 2, 4, 6 și așa mai departe sunt factoriali: produse de numere întregi consecutive (de exemplu $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$). Euler obținuse deja această formulă pe cale euristică; acum Weiestrass a putut să-i dea un sens riguros. Pornind iarăși de la Euler, el a legat funcțiile trigonometrice de funcția exponențială, prin

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Toate proprietățile standard ale acestor funcții rezultau din exprimarea lor ca serii de puteri. Puteam defini chiar și π și demonstra că $e^{i\pi} = -1$, după cum arătase Euler, ceea ce însemna că logaritmii complecși se comportau așa cum arătase Euler. *Toate aveau sens.* Analiza complexă nu se reducea la o extensie a analizei reale, era un domeniu de sine stătător. De fapt, deseori era mai simplu să lucrezi în domeniul complex și să extragi la urmă rezultatul real.

Pentru Weierstrass, toate acestea nu erau decât un început – prima etapă a unui vast program, dar important era ca fundamentele să fie bine așezate, căci lucrurile mai complicate decurgeau cu ușurință de aici.

IPOTEZA LUI RIEMANN

Cea mai celebră problemă nerezolvată din întreaga matematică este Ipoteza lui Riemann, o problemă de analiză complexă care a apărut în legătură cu numerele prime, dar are repercusiuni prin toată matematica.

Pe la 1793 Gauss a emis ipoteza că numărul numerelor prime mai mici decât x este aproximativ $x / \log x$. De fapt, el a sugerat o aproximaţie mai precisă, numită integrala logaritmică. În 1737 Euler a observat o stranie legătură între teoria numerelor şi analiză: seria infinită

$$1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \ldots$$

este egală cu produsul, luat după toate numerele prime p, al seriilor

$$1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \ldots = \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Pentru ca seria să conveargă, trebuie luat $s > 1$.

În 1848, Pafnutii Cebâşev a făcut anumite progrese în direcţia demonstrării conjecturii lui Gauss, folosind o funcţie complexă legată de funcţia lui Euler, cunoscută mai târziu sub numele de *funcţia zeta* $\zeta(z)$. Rolul acestei funcţii a fost lămurit de Riemann în articolul său din 1859 *Asupra numerelor prime mai mici decât o mărime dată*. El a arătat că proprietăţile statistice ale numerelor prime sunt strâns legate de zerourile funcţiei zeta, adică de soluţiile z ale ecuaţiei $\zeta(z) = 0$.

În 1896 Jacques Hadamard şi Charles de la Vallée Poussin au folosit funcţia zeta pentru a demonstra teorema numerelor prime. Pasul principal este de a arăta că $\zeta(z)$ este nenulă pentru orice z de forma $1+it$. Cu cât determinăm mai bine poziţiile zerourilor funcţiei zeta, cu atât aflăm mai multe despre numerele prime. Riemann a emis ipoteza că toate zerourile, în afara celor banale – numere întregi negative pare –, se găsesc pe dreapta critică $z = ½ + it$.

În 1914 Hardy a demonstrat că un număr infinit de zerouri se găsesc pe această dreaptă. Rezultatele obţinute cu ajutorul calculatorului susţin de asemenea conjectura. Între 2001 şi 2005 programul ZetaGrid al lui Sebastian Wedeniwski a verificat că primele 100 de miliarde de zerouri se găsesc pe dreapta critică.

Ipoteza lui Riemann a făcut parte din cea de-a opta problemă din faimoasa listă de probleme matematice nerezolvate a lui Hilbert, şi este una dintre problemele propuse pentru Premiul Millenium de Institutul Matematic Clay.

Weierstrass avea o minte neobişnuit de clară. Îşi găsea mereu calea prin combinaţii complicate de limite, derivate şi integrale şi putea identifica dificultăţile potenţiale.

Una dintre cele mai surprinzătoare teoreme ale sale demonstrează că există o funcţie $f(x)$ de variabilă reală x, care e continuă în orice punct, dar nu e diferenţiabilă în nici un punct. Graficul lui f este o singură curbă neîntreruptă, dar atât de neregulată, încât nu are nicăieri vreo tangentă bine definită. Predecesorii lui n-ar fi crezut-o posibilă; contemporanii s-au întrebat la ce servea. Urmaşii lui au pornit de la ea pentru a ajunge la una dintre cele mai fascinante teorii noi ale secolului XX, fractalii.

Dar despre fractali, mai târziu.

O bază solidă

Inventatorii analizei nu dăduseră multă atenţie operaţiilor infinite. Euler presupunea că seriile de puteri erau la fel ca polinoamele, iar această presupunere a condus la efecte colosale. Dar în mâinile muritorilor de rând, acest gen de presupunere poate duce cu uşurinţă la non-sens. Chiar şi Euler a făcut unele afirmaţii mai degrabă stupide. De pildă, el a pornit de la seria de puteri

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

a cărei sumă este $1/(1 - x)$, a pus $x = -1$ şi a dedus că

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = {}^1/_2$$

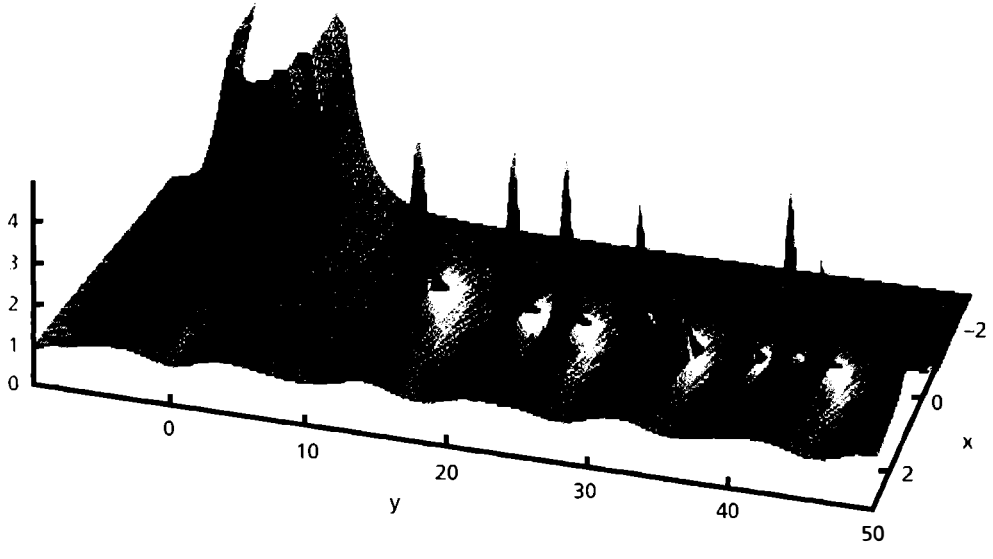
ceea ce e absurd. Seria respectivă de puteri nu converge decât dacă x este cuprins strict între –1 şi 1, aşa cum rezultă clar din teoria lui Weiestrass.

Pe termen lung, considerarea atentă a criticilor de genul celor ale episcopului Berkeley îmbogăţeşte matematica şi o aşază pe baze solide. Cu cât teoriile deveneau mai complicate, cu atât era mai important să ştii că te afli pe un teren sigur.

Chiar şi Euler a făcut unele afirmaţii mai degrabă stupide.

În prezent, majoritatea celor care folosesc matematica ignoră din nou asemenea subtilităţi, la gândul că lucrurile au fost lămurite şi că orice pare rezonabil are pesemne o justificare riguroasă. Încrederea aceasta ei le-o datorează lui Bolzano, Cauchy şi Weiestrass. Matematicienii profesionişti continuă totodată să elaboreze concepte riguroase privind procesele infinite.

Există chiar o tendință de a resuscita conceptul de infinitezimală, cunoscută sub numele de analiză nestandard, iar ea e perfect riguroasă și tehnic utilă în unele probleme altminteri inatacabile. Ea evită contradicțiile logice făcând din infinitezimale un nou tip de numere, diferite de numerele reale convenționale. În esență, se apropie de perspectiva lui Cauchy, dar e specialitatea unei minorități.



Valoarea absolută a funcției zeta a lui Riemann.

La ce ne ajută analiza

Analiza e folosită în biologie pentru a studia creşterea populaţiilor de organisme. Un exemplu simplu este logistica modelului Verhulst–Pearl. Aici variaţia populaţiei x în funcţie de timpul t e modelată de o ecuaţie diferenţială

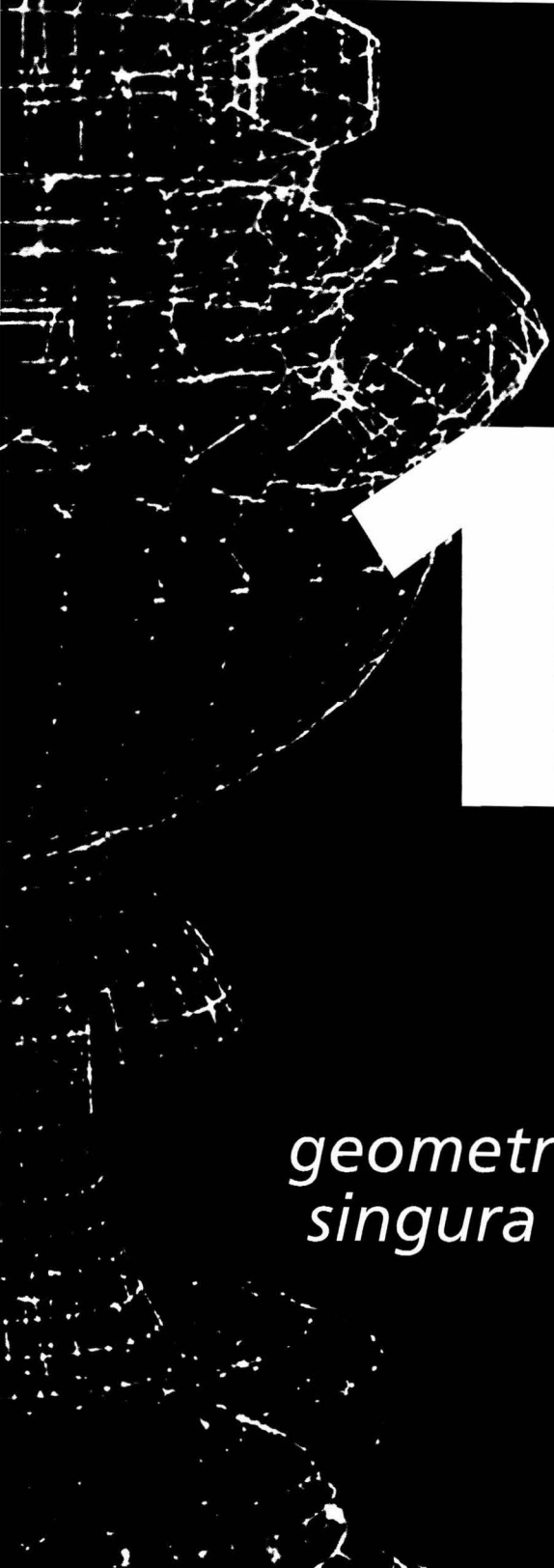
$$\frac{dx}{dt} = kx\left(1 - \frac{x}{M}\right)$$

unde constanta M este capacitatea de suţinere, cea mai mare populaţie pe care mediul o poate suporta.
Metodele standard ale analizei dau soluţia explicită

$$x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{-kt}}$$

care se numeşte curba logistică. Tiparul de creştere corespunzător începe cu o creştere rapidă (exponenţială), dar când populaţia atinge jumătate din capacitatea de susţinere ea începe să se plafoneze, iar în cele din urmă se opreşte la capacitatea de susţinere.
Această curbă nu e complet realistă, dar se potriveşte destul de bine cu multe populaţii din realitate. Modele mai complicate de acelaşi tip se potrivesc mai bine cu datele reale. Consumul uman al resurselor naturale poate avea un tipar similar curbei logistice, făcând posibilă estimarea cererii viitoare şi a perioadei probabile de epuizare a resurselor.

Consumul mondial de petrol brut, 1900–2000: curba netedă, ecuaţia logistică; curba neregulată, datele reale



12

Este oare geometria lui Euclid singura geometrie?

Calculul diferențial se bazase pe principii geometrice, dar geometria fusese redusă la calcule simbolice, care au fost apoi formalizate ca analiză. Totuşi, rolul gândirii vizuale în matematică s-a dezvoltat şi el, într-o direcție nouă şi inițial surprinzătoare. Pentru mai bine de 2000 de ani numele lui Euclid fusese sinonim cu geometria. Urmaşii lui i-au dezvoltat ideile, mai ales în cercetările lor privind secțiunile conice, dar n-au schimbat radical conceptul însuşi de geometrie. În esență, se presupunea că nu poate exista decât o *singură* geometrie, cea a lui Euclid, iar aceasta e o descriere matematică exactă a adevăratei geometrii a spațiului fizic. Oamenilor le venea greu să conceapă alternative. Această situație nu putea să dureze.

Geometria sferică și cea proiectivă

Prima abatere semnificativă de la geometria euclidiană a provenit din domeniul foarte practic al navigației. Pe distanțe scurte, Pământul e aproape plat, iar caracteristicile lui geografice pot fi cartografiate pe un plan. Dar când corăbiile au început să întreprindă călătorii tot mai lungi, a trebuit să se țină seama de adevărata formă a planetei. Câteva civilizații antice ştiuseră că Pământul este rotund – există multe indicii, de la felul în care corăbiile par să dispară la orizont, până la umbra planetei pe Lună în timpul eclipselor lunare. În general, se presupunea că Pământul este o sferă perfectă.

În realitate, sfera e puțin turtită: diametrul la ecuator este de 12 756 km, iar la poli de 12 714 km. Diferența e relativ mică – 1 la 300. Pe vremea când navigatorii făceau în mod curent erori de mai multe sute de kilometri, un Pământ rotund oferea un model matematic perfect acceptabil. La acea epocă, accentul se punea mai degrabă pe *trigonometria* decât pe geometria sferică – elementele de bază ale calculelor de navigație, iar nu analiza logică a sferei ca tip de spațiu. Întrucât sfera se află în chip firesc în spațiul euclidian tridimensional, nimeni nu considera că geometria sferică ar fi diferită de cea euclidiană. Orice deosebire era rezultatul curburii Pământului. Geometria spațiului însuşi rămânea euclidiană.

O abatere mai importantă de la Euclid a fost apariția, la începutul secolului XVII, a *geometriei proiective*. Domeniul s-a născut nu din ştiință, ci din artă:

din cercetările teoretice şi practice asupra perspectivei făcute de artiştii Renaşterii italiene. Scopul era de a face ca pictura să pară realistă; rezultatul a fost un nou mod de a gândi geometria. Dar şi această contribuţie putea fi privită ca o inovaţie în cadrul clasic euclidian. Ea se referea la felul în care vedem spaţiul, nu la spaţiul însuşi.

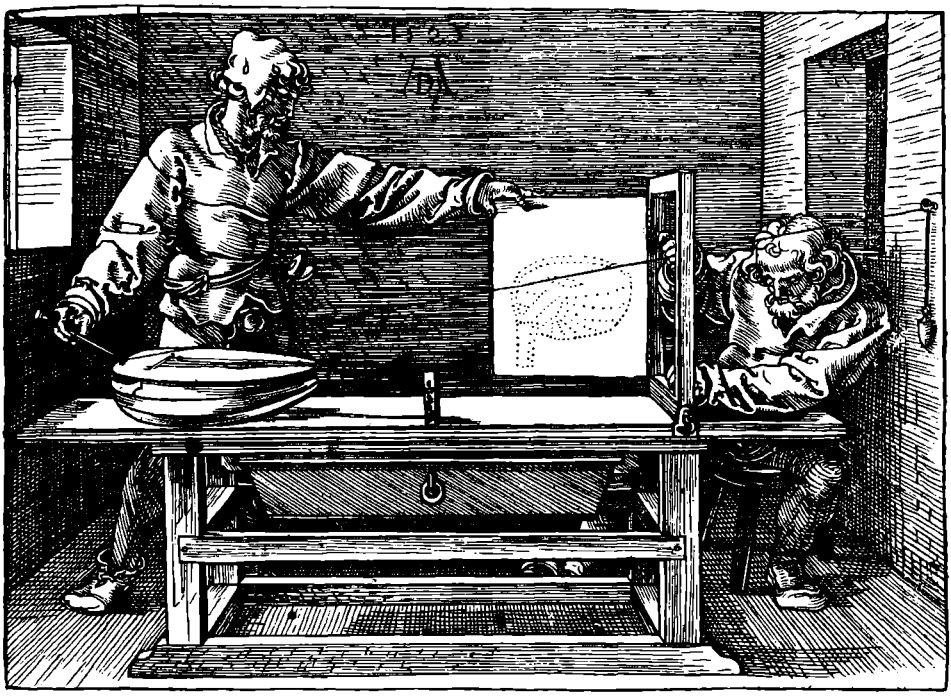
Descoperirea faptului că Euclid nu era singur, că pot exista tipuri logic coerente de geometrie în care multe dintre teoremele lui Euclid nu mai erau valabile, s-a născut din resuscitarea interesului pentru fundamentele logice ale geometriei, dezbătute şi dezvoltate de la mijlocul secolului XVIII până la mijlocul secolului XIX. În centrul discuţiilor s-a aflat Postulatul al V-lea al lui Euclid, care – într-o manieră stângace – afirma existenţa dreptelor paralele. Încercările de a deduce acest postulat din celelalte axiome ale lui Euclid au condus în cele din urmă la înţelegerea faptului că o asemenea deducţie e imposibilă. Există tipuri coerente de geometrie, altele decât cea euclidiană. În prezent, aceste geometrii neeuclidiene au devenit instrumente indispensabile în matematica pură şi în fizica matematică.

Geometrie şi artă

Dacă vorbim despre Europa, geometria a stagnat între anii 300 şi 1600. Resuscitarea geometriei ca domeniu viu a venit de la problema perspectivei în artă: cum să redai în mod realist o lume tridimensională pe o pânză bidimensională.

Artiştii Renaşterii nu s-au mărginit să picteze. Mulţi erau prinşi în munci inginereşti, în scopuri paşnice sau militare. Arta lor avea o latură practică, iar geometria perspectivei era o cercetare practică, aplicată atât în arhitectură, cât şi în artele vizuale. Exista de asemenea un interes tot mai mare pentru optică – matematica luminii, care a înflorit după inventarea telescopului şi a microscopului. Primul mare artist care a meditat asupra matematicii perspectivei a fost Filippo Brunelleschi. De fapt, arta lui a fost în primul rând un vehicul al matematicii sale. O carte plină de idei rodnice a fost tratatul lui Leon Battista Alberti *Della pittura*, scris în 1435 şi publicat în 1511. Alberti a început prin a face anumite simplificări importante şi aparent inofensive – reflexul tipic al unui matematician. Vederea umană e un subiect complex. De pildă, noi folosim doi ochi separaţi de o mică distanţă pentru a genera imagini stereoscopice, dând senzaţia de adâncime. Alberti a simplificat realitatea presupunând existenţa unui singur ochi cu o pupilă minusculă, care

...geometria a stagnat între anii 300 şi 1600.



Proiecția unui decor – Albrecht Dürer

funcționa ca o cameră obscură. El şi-a închipuit un artist pictând un decor, stând în fața şevaletului şi încercând să facă aşa încât imaginea de pe pânză să corespundă cu cea percepută de ochiul său (unicul). Atât pânza, cât şi realitatea îşi proiectează imaginile lor pe retină, în spatele ochiului. Cel mai simplu (conceptual) mijloc de a asigura o corespondență perfectă este să faci pânza transparentă, să priveşti prin ea dintr-un punct fix şi să desenezi pe pânză exact ce vede ochiul. În acest fel decorul tridimensional e *proiectat* pe pânză. Uneşti printr-o linie dreaptă fiecare detaliu al decorului cu ochiul, observi locul unde dreapta intersectează planul pânzei: acolo pictezi detaliul.

Ideea nu e prea utilă dacă o iei *ad litteram*, deşi unii artişti chiar asta au făcut, folosind într-o primă etapă materiale transparente sau sticlă în locul pânzei, spre a trece apoi conturul pe pânză pentru pictatul propriu-zis. Mai practic este să folosim această formulare conceptuală pentru a lega geometria decorului tridimensional de cea a imaginii bidimensionale. Geometria euclidiană obişnuită are în vedere proprietățile care rămân neschimbate la mişcări rigide – lungimi, unghiuri. Euclid n-a spus-o explicit, dar faptul că a folosit triunghiurile congruente ca instrument de bază are acelaşi efect. (Acestea sunt triunghiuri de aceeaşi mărime şi formă, dar aflate în poziții diferite.)

În mod asemănător, geometria perspectivei se concentrează asupra proprietăților care rămân neschimbate prin proiecție. E ușor de văzut că lungimile și unghiurile nu se comportă astfel. Putem acoperi Luna cu degetul, deci lungimile se pot schimba. La fel se întâmplă cu unghiurile – dacă privim colțul unei clădiri (un unghi drept) oblic, nu ne apare ca unghi drept.

Care sunt atunci proprietățile figurilor care se păstrează prin proiecție? Cele mai importante sunt atât de simple, încât putem trece cu vederea semnificația lor. Punctele rămân puncte. Dreptele rămân drepte. Imaginea unui punct situat pe o dreaptă e situată pe imaginea acelei drepte. De aceea, dacă două drepte se intersectează într-un punct, imaginile lor se intersectează în punctul corespunzător. Relațiile de incidență ale punctelor și dreptelor se păstrează prin proiecție.

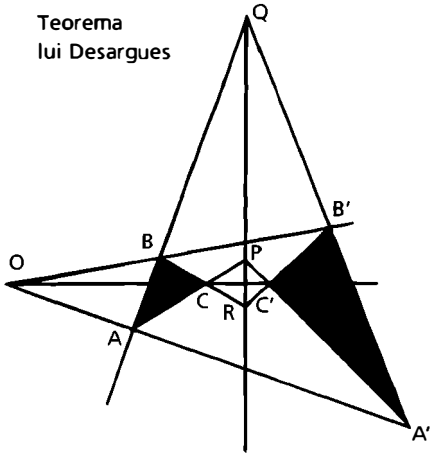
O trăsătură importantă care nu e păstrată este relația de paralelism. Închipuiți-vă că stați în mijlocul unui drum lung și drept, privind înainte. Cele două laturi ale drumului, care în realitatea tridimensională sunt paralele – deci nu se întâlnesc niciodată –, nu par paralele, ci converg spre un punct din orizontul îndepărtat. Ele se comportă astfel pe un plan ideal infinit, iar nu pe Pământul ușor rotunjit. De fapt, ele nu se comportă exact așa decât pe un plan. Pe o sferă ar exista o mică distanță, prea mică pentru a fi văzută, între punctele în care dreptele intersectează orizontul, iar întreaga problemă a dreptelor paralele pe o sferă e oricum delicată.

Paralelismul e foarte util pentru desenul în perspectivă. El se ascunde în spatele modului obișnuit de a desena în perspectivă cutii cu unghiuri drepte, folosind o dreaptă a orizontului și două puncte de fugă, situate acolo unde muchiile cutiei intersectează orizontul în perspectivă. Cartea lui Piero della Francesca *De prospectiva pingendi* (1482–1487) a transformat metodele lui Alberti în tehnici practice pentru artiști, iar el le-a folosit obținând efecte spectaculoase în picturile sale dramatice și extrem de realiste.

Scrierile pictorilor din Renaștere au rezolvat multe probleme de geometrie a perspectivei, dar ei au făcut-o semi-empiric, fără acel fundament logic pe care Euclid îl oferise geometriei. Aceste chestiuni ținând de fundamentare au fost rezolvate în cele din urmă de Brook Taylor și Johann Heinrich Lambert în secolul XVIII. Dar pe atunci multe lucruri tulburătoare se petreceau în geometrie.

Desargues

Prima teoremă nebanală din geometria proiectivă a fost descoperită de inginerul și arhitectul Girard Desargues, și publicată în 1648 într-o carte a lui Abraham Bosse. Desargues a demonstrat următoarea teoremă remarcabilă. Să presupunem



că triunghiurile *ABC* şi *A'B'C'* sunt în perspectivă, ceea ce înseamnă că cele trei drepte *AA'*, *BB'* şi *CC'* trec toate prin acelaşi punct. Atunci cele trei puncte *P*, *Q* şi *R* în care se intersectează laturile corespunzătoare ale celor trei triunghiuri se găsesc toate pe aceeaşi dreaptă. Acest rezultat se numeşte acum Teorema lui Desargues. El nu se referă la lungimi sau unghiuri, ci doar la relaţii de incidenţă între drepte şi puncte.

Există un truc care face ca teorema să fie evidentă: imaginaţi-vă că e desenul unei figuri tridimensionale, în care cele două triunghiuri sunt situate în două plane. Atunci dreapta de intersecţie a acestor două plane e dreapta care conţine cele trei puncte *P*, *Q* şi *R* ale lui Desargues. Cu puţină atenţie, teorema poate fi chiar demonstrată pe această cale, construind o figură tridimensională adecvată, a cărei proiecţie să arate ca cele două triunghiuri. Geometria euclidiană poate fi deci folosită pentru a demonstra teoreme proiective.

Axiomele lui Euclid

Geometria proiectivă se îndepărtează de geometria euclidiană atât cât se îndepărtează punctul ei de vedere (calambur voit), dar e încă legată de geometria euclidiană. Este studiul unui nou tip de transformări, proiecţiile, dar modelul de bază al spaţiului care se transformă e unul euclidian. Şi totuşi geometria proiectivă i-a făcut pe matematicieni mai receptivi faţă de posibilitatea unor noi tipuri de gândire geometrică, iar o veche întrebare a revenit în prim-plan.

Aproape toate axiomele formulate de Euclid pentru geometrie erau atât de evidente, încât nici un om cu mintea sănătoasă nu le putea pune sub semnul întrebării. Toate unghiurile drepte sunt egale, de pildă. Dacă această axiomă ar cădea ar însemna că e ceva în neregulă cu definiţia unghiului drept. Dar Postulatul al V-lea, cel care se referea la drepte paralele, era de cu totul alt gen. Era complicat. Euclid îl enunţă astfel: Dacă o dreaptă intersectând două drepte face unghiuri interioare de aceeaşi parte mai mici de două unghiuri drepte, atunci cele două drepte, indefinit prelungite, se întâlnesc de partea unde se găsesc cele două unghiuri mai mici de două unghiuri drepte.

Sună mai mult a teoremă decât a axiomă. *Era* cumva o teoremă? Exista vreo cale de a o demonstra, pornind eventual de la ceva mai simplu, mai intuitiv?

O îmbunătățire a fost adusă de John Playfair în 1795. El a înlocuit-o cu afirmația că pentru orice dreaptă dată și pentru orice punct exterior ei există o dreaptă și numai una care trece prin punct și e paralelă cu dreapta dată. Afirmația e echivalentă cu Postulatul al V-lea al lui Euclid – adică, fiecare din ele e o consecință a celeilalte, date fiind celelalte axiome.

Legendre

În 1794, Adrien-Marie Legendre a descoperit un enunț echivalent, existența *triunghiurilor asemenea* – triunghiuri având aceleași unghiuri, însă cu laturi de mărimi diferite. Dar el și majoritatea celorlalți matematicieni voiau ceva mai intuitiv. Se credea că Postulatul al V-lea era pur și simplu superfluu – o consecință a celorlalte axiome. Nu lipsea decât demonstrația. De aceea Legendre a încercat tot felul de lucruri. Folosind celelalte axiome, a demonstrat – spre propria-i satisfacție, în orice caz – că suma unghiurilor unui triunghi este fie egală, fie mai mică de 180°. (El trebuie să fi știut că în geometria sferică suma este mai mare, dar aici era vorba de geometria planului.) Dacă suma este întotdeauna 180°, rezultă Postulatul al V-lea. A presupus deci că suma ar fi mai mică de 180° și a dedus consecințele acestei presupuneri.

Majoritatea matematicienilor voiau ceva mai intuitiv.

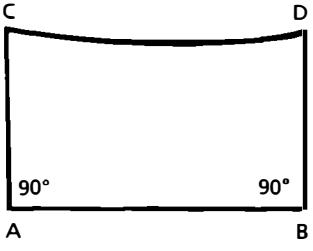
O consecință frapantă era o relație între aria triunghiului și suma unghiurilor sale: aria este proporțională cu diferența dintre 180° și suma unghiurilor. Părea ceva promițător: dacă putea construi un triunghi ale cărui laturi să fie de două ori mai mari decât cele ale unui triunghi dat, dar cu aceleași unghiuri, atunci ar fi obținut o contradicție, fiindcă triunghiul mai mare ar fi avut aceeași arie cu cel mai mic. Dar oricât a încercat să construiască triunghiul mai mare, s-a văzut nevoit să apeleze la Postulatul al V-lea.

Din munca lui a reușit să păstreze un singur rezultat pozitiv. Fără a presupune Postulatul al V-lea, a demonstrat că era imposibil ca unele triunghiuri să aibă suma unghiurilor mai mare de 180°, iar altele mai mică de 180°. Dacă un triunghi are suma unghiurilor mai mare de 180°, la fel o are orice triunghi; analog dacă suma e mai mică de 180°. Există așadar trei cazuri posibile:

- Suma unghiurilor oricărui triunghi este exact 180° (geometria euclidiană).
- Suma unghiurilor oricărui triunghi este mai mică de 180°.
- Suma unghiurilor oricărui triunghi este mai mare de 180° (caz pe care Legendre considera că-l exclusese; mai târziu s-a dovedit că făcuse alte presupuneri tacite).

Saccheri

În 1733 Gerolamo Saccheri, un iezuit din Pavia, a publicat o lucrare ambițioasă, *Euclides ab omni naevo vindicatus* (*Euclid apărat de orice greşeli*). Considera şi el trei cazuri, dar folosea un patrulater pentru a le deosebi. Să presupunem că patrulaterul este $ABCD$, cu A şi B unghiuri drepte şi $AC = BD$. Atunci, spunea Saccheri, din geometria euclidiană rezultă că C şi D sunt unghiuri drepte. Mai puțin evident, dacă C şi D sunt unghiuri drepte în orice patrulater de acest tip, atunci Postulatul al V-lea rezultă ca o consecință.



Patrulaterul lui Saccheri: dreapta CD a fost desenată curbă perntru a evita ipotezele euclidiene privind unghiurile C şi D

Fără a folosi Postulatul al V-lea, Saccheri a demonstrat că unghiurile C şi D sunt egale. Aşa încât rămâneau două posibilități distincte:

- *Ipoteza unghiului obtuz*: C şi D sunt mai mari decât un unghi drept.
- *Ipoteza unghiului ascuțit*: C şi D sunt mai mici decât un unghi drept.

Ideea lui Saccheri a fost să pornească pe rând de la fiecare din aceste ipoteze şi să ajungă la o contradicție, geometria euclidiană rămânând astfel singura posibilitate logică.

El a început cu ipoteza unghiului obtuz şi printr-o serie de teoreme a dedus – aşa credea – că unghiurile C şi D trebuiau să fie drepte. Aceasta era o contradicție, deci ipoteza unghiului obtuz trebuia să fie falsă. A considerat apoi ipoteza unghiului ascuțit, care conducea la o altă serie de teoreme, toate corecte şi destul de interesante în sine. În cele din urmă a demonstrat o teoremă destul de complicată despre o familie de drepte trecând toate printr-un punct, de unde rezulta că două din aceste drepte ar avea o perpendiculară comună la infinit. Aceasta nu e de fapt o contradicție, dar Saccheri credea că este şi a afirmat că ipoteza unghiului ascuțit trebuia respinsă şi ea.

Aceasta nu lăsa în picioare decât geometria euclidiană, aşa încât Saccheri considera că programul său e îndeplinit, iar Euclid confirmat. Alții au observat însă că nu obținuse cu adevărat o contradicție din ipoteza unghiului ascuțit, ci doar o teoremă oarecum surprinzătoare. Pe la 1759 d'Alembert declara că Postulatul al V-lea era „scandalul *Elementelor de geometrie*" .

La ce i-a ajutat geometria neeuclidiană

Pe la 1813 Gauss era tot mai convins că ceea ce el numise la început geometrie anti-euclidiană, apoi astrală şi în cele din urmă neeuclidiană era o posibilitate logică. A început să se întrebe care era adevărata geometrie a spaţiului şi a măsurat unghiurile unui triunghi format de trei munţi din apropiere de Göttingen – Brocken, Hohehagen şi Inselberg. El a folosit pentru măsurători linia de vizare, aşa încât curbura Pământului nu intra în joc. Suma unghiurilor măsurate era cu 15 secunde de arc mai mare de 180°, ceea ce reprezenta cazul unghiului obtuz, dar probabilitatea unor erori de observaţie făcea întregul exerciţiu contestabil. Gauss avea nevoie de un triunghi mult mai mare şi de instrumente mult mai precise cu care să-i măsoare unghiurile.

Lambert

Un matematician german, Georg Klügel, a citit cartea lui Saccheri şi a emis opinia neortodoxă că încrederea în adevărul Postulatului al V-lea ţinea mai degrabă de experienţă decât de logică. În esenţă, el spunea că ceva din modul nostru de a gândi privind spaţiul ne face să credem în existenţa dreptelor paralele de tipul celor considerate de Euclid.

În 1766, Johann Heinrich Lambert, urmând sugestia lui Klügel, a început un studiu asemănător celui al lui Saccheri, dar a plecat de la un patrulater cu trei unghiuri drepte. Unghiul rămas trebuia să fie sau unghi drept (geometria euclidiană), sau unul obtuz ori ascuţit. La fel ca Saccheri, el credea că unghiul obtuz conduce la o contradicţie. Mai precis, a hotărât că se ajunge astfel la geometria sferică, unde se ştia de multă vreme că suma unghiurilor unui patrulater e mai mare de 360°, deoarece suma unghiurilor unui triunghi e mai mare de 180°. Cum sfera nu e plană, cazul obtuz este respins.

Dar el nu a pretins acelaşi lucru în cazul unghiului ascuţit, ci a demonstrat câteva teoreme stranii, cea mai frapantă fiind o formulă pentru aria unui poligon cu n laturi. Adunaţi toate unghiurile şi scădeţi rezultatul din $2n - 4$ unghiuri drepte: rezultatul e proporţional cu aria poligonului. Această formulă i-a amintit lui Lambert de o formulă similară din geometria sferică: adunaţi toate unghiurile şi scădeţi de aici $2n - 4$ unghiuri drepte; din nou rezultatul e proporţional cu aria poligonului. Diferenţa e minoră: scăderea e făcută în

ordine inversă. A ajuns astfel să facă o predicție remarcabil de pătrunzătoare, dar obscură: geometria cazului unghi ascuțit e aceeași cu cea de pe o sferă de *rază imaginară.*

A scris atunci un scurt articol despre funcțiile trigonometrice ale unghiurilor imaginare, obținând câteva formule frumoase și perfect coerente. Recunoaștem astăzi aceste funcții ca pe așa-numitele funcții hiperbolice, care pot fi definite fără a folosi numerele imaginare și care satisfac toate formulele lui Lambert. Ceva interesant se ascundea pesemne în spatele straniilor și enigmaticelor sale idei. Dar ce anume?

Dilema lui Gauss

Cei mai bine informați geometri simțeau acum limpede că Postulatul al V-lea nu putea fi demonstrat din restul axiomelor. Cazul unghiului ascuțit părea prea coerent pentru a conduce la o contradicție. Pe de altă parte, o sferă de rază imaginară nu era genul de obiect care putea fi propus pentru a justifica această credință.

Kant susținuse că geometria spațiului trebuie să fie euclidiană.

Unul dintre acești geometri era Gauss, care se convinsese de la o vârstă fragedă că o geometrie neeuclidiană logic coerentă era posibilă și demonstrase numeroase teoreme într-o asemenea geometrie. Dar, așa cum a explicat într-o scrisoare din 1829 către Bessel, nu avea de gând să-și publice rezultatele fiindcă se temea de ceea ce numea „scandalul beoțienilor". Oamenii lipsiți de imaginație n-ar fi priceput, iar în ignoranța și în adeziunea lor oarbă la tradiție și-ar fi bătut joc de truda lui. La aceasta trebuie să fi contribuit și prestigiul operei filozofice a lui Kant, care susținuse că geometria spațiului trebuie să fie euclidiană.

Pe la 1799 Gauss îi scria ungurului Wolfgang Bolyai, spunându-i că rezultatele obținute „par să mă oblige să pun la îndoială adevărul geometriei însăși. E drept că am ajuns la multe lucruri despre care cei mai mulți ar crede că reprezintă o demonstrație [a Postulatului al V-lea pornind de la celelalte axiome], dar pentru mine ele nu valorează nimic."

Alți matematicieni au fost mai puțin circumspecți. În 1826 Nikolai Ivanovici Lobacevski, de la Universitatea din Kazan, Rusia, a ținut cursuri de geometrie neeuclidiană. Nu știa nimic despre cercetările lui Gauss, dar demonstrase teoreme similare folosind propriile sale metode. Două articole pe această temă au apărut în 1829 și 1835. Departe de a stârni scandaluri, cum se temuse Gauss, aceste articole au trecut aproape neobservate. Pe la 1840 Lobacevski

publica o carte pe acest subiect, în care deplângea lipsa de interes, iar în 1855 a mai publicat încă una.

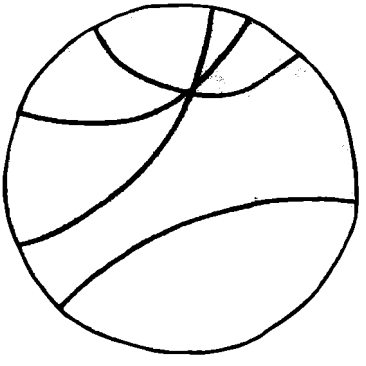
În mod independent, János, fiul lui Wolfgang Bolyai, ofițer de profesie, a avut prin 1825 idei asemănătoare și le-a publicat într-un articol de 26 de pagini care a apărut ca o anexă a tratatului de geometrie al tatălui său, *Tentamen juventum studiosam in elementa matheseos* (*Eseu privind elementele matematicii pentru tineretul studios*), din 1832. „Am făcut descoperiri atât de minunate, încât sunt eu însumi uimit", îi scria tatălui său.

Gauss a citit articolul, dar i-a spus lui Wolfgang că nu putea lăuda eforturile tînărului, fiindcă s-ar lăuda de fapt pe sine însuși. Era poate un pic nedrept, dar așa se purta Gauss.

Geometria neeuclidiană

Istoria geometriei neeuclidiene e greu de prezentat în detaliu, dar putem rezuma ceea ce a urmat acestor eforturi de pionierat. Există o profundă unitate în spatele celor trei cazuri remarcate de Saccheri, Lambert, Gauss, Bolyai și Lobacevski. Ce le unește este noțiunea de *curbură*. Geometria neeuclidiană e într-adevăr geometria naturală a unei suprafețe curbate.

Dacă suprafața are curbură pozitivă precum o sferă, atunci avem cazul unghiului obtuz. Acesta a fost respins deoarece geometria sferică diferă în mod evident de cea euclidiană – de exemplu, orice două drepte, adică cercuri mari (ale căror centre se află în centrul sferei), se intersectează în două puncte, nu într-unul singur, așa cum ne-am aștepta din partea a două drepte euclidiene.



Modelul geometriei hiperbolice al lui Poincaré arată clar că există o infinitate de drepte paralele trecând printr-un punct și care nu intersectează o dreaptă dată.

Acum ne dăm seama că această obiecție e neîntemeiată. Dacă identificăm punctele diametral opuse de pe sferă – adică le considerăm identice –, atunci dreptele (cercurile mari) continuă să aibă sens, întrucât dacă un punct e situat pe un cerc mare, punctul diametral opus e situat pe același cerc. Cu această identificare, aproape toate proprietățile geometrice rămân neschimbate, dar dreptele se întâlnesc acum într-un singur punct. Din perspectivă topologică, suprafața obținută este planul proiectiv, deși

geometria implicată nu e geometria proiectivă clasică. Azi o numim geometrie eliptică şi e considerată la fel de rezonabilă ca geometria euclidiană.

Dacă suprafaţa are curbură negativă, având formă de şa, atunci avem cazul unghiului ascuţit. Geometria rezultantă se numeşte *hiperbolică*. Ea are multe trăsături bizare care o deosebesc de geometria euclidiană.

Dacă suprafaţa are curbura zero, ca un plan euclidian, atunci ea este chiar planul euclidian şi obţinem geometria euclidiană.

Toate cele trei geometrii satisfac toate celelalte axiome ale lui Euclid în afară de Postulatul al V-lea. Hotărârea lui Euclid de a include postulatul e astfel justificată.

Diversele geometrii pot fi modelate în mai multe feluri. Geometria hiperbolică e deosebit de elastică în această privinţă. Într-unul din modele, spaţiul implicat e semiplanul superior din planul complex, excluzând axa reală şi tot ce se află sub ea. O dreaptă e un semicerc care intersectează axa reală sub unghiuri drepte. Din punct de vedere topologic, acest spaţiu e acelaşi cu un plan, iar dreptele sunt identice cu dreptele obişnuite. Curbura dreptelor reflectă curbura negativă a spaţiului de bază.

Într-un alt model al geometriei hiperbolice, propus de Poincaré, spaţiul e reprezentat ca interiorul unui cerc, fără frontiera acestuia, iar dreptele sunt cercuri care intersectează frontiera sub unghiuri drepte. Din nou, geometria distorsionată reflectă curbura spaţiului de bază. Artistul Moritz Escher a creat multe desene pornind de la acest model al geometriei hiperbolice despre care a aflat de la geometrul canadian Coxeter.

Cele două modele indică existenţa unor legături profunde între geometria hiperbolică şi analiza complexă. Aceste legături se referă la anumite grupuri de transformări ale planului complex; geometria hiperbolică e geometria invarianţilor lor, conform Programului de la Erlangen al lui Felix Klein. O altă clasă de transformări, numite transformări Möbius, implică geometria eliptică.

Geometria spaţiului

Ce se poate spune despre geometria spaţiului? Acum suntem de acord cu Klügel şi îl respingem pe Kant, dar asta ţine de experienţă, nu un lucru care să poată fi dedus doar prin gândire. Relativitatea generală a lui Einstein ne spune că spaţiul (şi timpul) poate fi curbat; curbura este efectul gravitaţional al materiei. Curbura poate varia de la un loc la altul, în funcţie de distribuţia materiei, aşa încât nu geometria spaţiului e adevărata problemă. Spaţiul poate avea diferite geometrii în diferite locuri. Geometria lui Euclid funcţionează bine la scară

umană, în lumea noastră, deoarece curbura gravitațională e atât de mică încât n-o observăm în viața de zi cu zi. Dar dincolo, în universul cel mare, predomină geometria neeuclidiană.

Din Antichitate până spre mijlocul secolului XIX, a domnit o totală confuzie între matematică şi lumea reală. Se credea îndeobşte că matematica era o reprezentare a unor trăsături fundamentale şi inevitabile ale lumii reale şi că adevărul matematic era absolut. Nicăieri presupunerea aceasta nu era mai adânc înrădăcinată decât în geometrie. Spațiul era euclidian pentru oricine îşi punea problema. Cum altfel să fie?

Această întrebare a încetat să mai fie una retorică atunci când alternative logic coerente la geometria lui Euclid au început să apară. A fost nevoie de ceva timp pentru a recunoaşte faptul că erau într-adevăr logic coerente – cel puțin, la fel ca geometria lui Euclid – şi încă şi mai mult pentru a înțelege că propriul nostru spațiu fizic ar putea să nu fie perfect euclidian. Ca întotdeauna, de vină a fost provincialismul nostru uman – ne proiectăm experiențele limitate dintr-un colțişor al universului asupra întregului univers. Imaginația noastră pare să încline în favoarea unui model euclidian deoarece, probabil, la scara redusă a experienței noastre, e un model excelent şi e cel mai simplu dintre cele disponibile.

...există multe alternative la geometria lui Euclid.

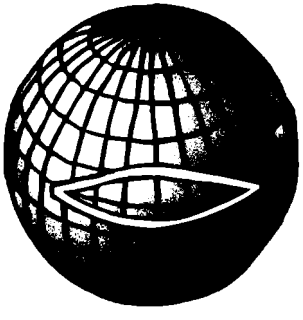
Grație imaginației şi nonconformismului, contestate deseori pe nedrept de o majoritate mai puțin imaginativă, am înțeles acum – cel puțin matematicienii şi fizicienii au înțeles – că există multe alternative la geometria lui Euclid şi că natura spațiului fizic e o problemă care ține şi de observație, nu doar de gândire. În prezent, facem distincția netă între modelele matematice ale realității şi realitatea însăşi. De altfel, o mare parte din matematică nu are nici o legătură evidentă cu realitatea, dar chiar şi aşa e utilă.

La ce ne ajută geometria neeuclidiană

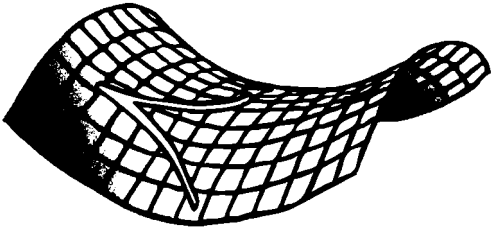
Ce formă are universul? Întrebarea poate părea simplă, dar nu e uşor de răspuns la ea – în parte fiindcă universul e atât de mare, dar mai ales fiindcă noi ne aflăm înăuntrul lui şi nu putem face un pas înapoi pentru a-l privi în întregime. Printr-o comparaţie pe care o datorăm lui Gauss, unei furnici trăind pe o suprafaţă şi observând-o doar din interiorul ei i-ar fi greu să spună dacă suprafaţa e un plan, o sferă, un tor sau ceva mai complicat.

Relativitatea generală ne spune că în apropierea unui corp material, cum ar fi o stea, spaţiul-timp e curbat. Ecuaţiile lui Einstein, care leagă curbura cu densitatea materiei, au multe soluţii diferite. În cele mai simple, universul în întregul lui are o curbură pozitivă, iar topologia lui este cea a unei sfere. Dar, din cunoştinţele actuale, curbura globală a universului real ar fi negativă.

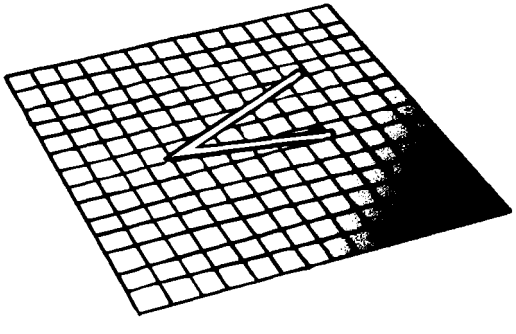
Spaţiu cu o curbură pozitivă, negativă şi nulă



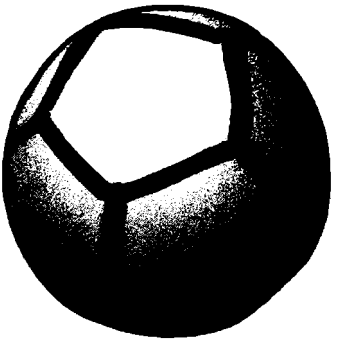
Un *univers închis* se curbează spre interior. Dreptele divergente se reîntâlnesc. Densitatea > densitatea critică.



Un *univers deschis* se curbează spre exterior. Dreptele divergente se curbează la unghiuri din ce în ce mai mari. Densitatea < densitatea critică.



Un *univers plat* nu are curbură. Dreptele divergente rămân sub un unghi constant. Densitatea = densitatea critică.



Pentru a obține spațiul dodecaedric al lui Poincaré, identificați fețele opuse.

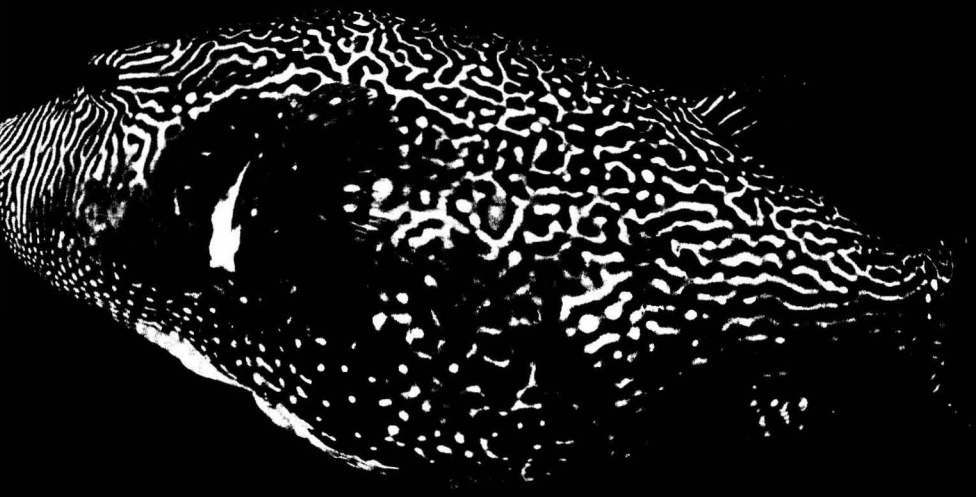
Nu știm nici măcar dacă universul e infinit, ca spațiul euclidian, sau are o întindere finită, ca o sferă. Câțiva fizicieni susțin că universul e infinit, dar baza experimentală pentru această afirmație e îndoielnică. Cei mai mulți cred că este finit.

În mod surprinzător, un univers finit poate exista și fără a avea o frontieră. Sfera e astfel, în două dimensiuni, la fel și torul. Torul poate căpăta o geometrie *plată*, moștenită de la un pătrat prin identificarea laturilor opuse. Topologii au mai descoperit că spațiul poate fi finit, dar cu o curbură negativă: un mod de a construi asemenea spații este de a lua un poliedru finit din spațiul hiperbolic și a identifica diversele fețe, așa încât o dreaptă ieșind în afara poliedrului printr-una din fețe reintră imediat printr-o altă față. Această construcție este analogă felului în care își corespund laturile ecranului în anumite jocuri pe calculator.

Dacă spațiul e finit, atunci ar trebui să poată fi observată aceeași stea în direcții diferite, dar ar părea mult mai departe de noi în anumite direcții decât în altele, iar regiunea observabilă a universului ar putea fi oricum prea mică. Dacă un spațiu finit are geometrie hiperbolică, aparițiile multiple ale acelorași stele în direcții diferite determină un sistem de cercuri uriașe pe cer, iar geometria acestor cercuri arată care e spațiul hiperbolic observat. Dar cercurile ar putea fi oriunde printre miliardele de stele ce pot fi văzute, iar până acum încercările de a le observa, bazate pe corelații statistice între pozițiile aparente ale stelelor, nu au dat nici un rezultat.

În 2003 datele furnizate de sonda spațială Wilkinson Microwave Anisotropy i-au condus pe Jean-Pierre Luminet și pe colaboratorii săi spre ipoteza că spațiul e finit și curbat *pozitiv*. Ei au găsit că spațiul dodecaedric al lui Poincaré – obținut prin identificarea fețelor opuse ale unui dodecaedru curbat – e în cel mai bun acord cu observațiile. Această ipoteză a fost prezentată publicului larg ca afirmația că universul are forma unei mingi de fotbal, dar ea nu a fost confirmată, iar în prezent nu avem nici o idee despre adevărata formă a spațiului, însă știm mult mai bine ce trebuie să facem pentru a o afla.

13



Cum să nu rezolvi o ecuație

Pe la 1850 matematica a suferit una dintre cele mai importante transformări din întreaga ei istorie, dar lucrul acesta nu s-a văzut imediat. Înainte de 1800, principalele obiecte de studiu matematic erau relativ concrete: numere, triunghiuri, sfere. Algebra folosea formule pentru a reprezenta operații cu numere, dar formulele erau privite ca reprezentări simbolice ale unor *procese*, nu ca lucruri de sine stătătoare. La 1900 însă, formulele şi transformările erau privite ca *lucruri*, nu ca procese, iar obiectele algebrei erau mult mai abstracte şi mai generale. De fapt, în algebră aproape orice putea fi admis. Chiar şi legile fundamentale, cum ar fi comutativitatea înmulțirii, $ab = ba$, ajunseseră să nu mai fie obligatorii în anumite domenii importante.

Teoria grupurilor

Aceste transformări au avut loc mai cu seamă deoarece matematicienii au descoperit teoria grupurilor, o ramură a matematicii apărută din încercările nereuşite de a rezolva ecuațiile algebrice, în special cvintica, ecuația de gradul 5. După 50 de ani de la descoperirea ei, teoria grupurilor a fost recunoscută drept cadrul corect pentru studierea noțiunii de *simetrie*. Pe măsură ce noile metode intrau în conştiința colectivă, devenea clar că simetria e o idee profundă şi esențială, cu nenumărate aplicații în fizică şi biologie. Teoria grupurilor a devenit un instrument indispensabil în orice domeniu al matematicii şi al ştiinței. Legăturile ei cu simetria sunt subliniate în majoritatea textelor introductive, dar au trebuit mai multe decenii pentru a se impune acestă perspectivă. Pe la 1900 Henri Poincaré a spus că teoria grupurilor era de fapt întreaga matematică redusă la esența ei, idee oarecum exagerată, dar justificabilă.

Teoria grupurilor a devenit un instrument indispensabil...

Punctul de cotitură în evoluția teoriei grupurilor au fost cercetările unui tânăr francez, Évariste Galois. A existat o lungă şi complicată preistorie – ideile lui Galois n-au răsărit din neant. Şi a existat o tot atât de complicată şi deseori confuză post-istorie, în care matematicienii au experimentat pe marginea noului concept, încercând să

înțeleagă ce era important şi ce nu. Dar, mai mult decât oricare altul, Galois a fost cel care a înțeles limpede nevoia de grupuri, a descoperit câteva dintre trăsăturile lor esențiale şi le-a demonstrat utilitatea în problemele fundamentale ale matematicii. Nu e cu totul surprinzător că rezultatele lui au trecut aproape neobservate în timpul vieții sale. Ele erau poate prea originale, dar trebuie spus că personalitatea lui Galois şi implicarea lui în politica revoluționară n-au avut darul să ajute. A fost o figură tragică, trăind în epoca multor tragedii personale, iar viața lui a fost una dintre cele mai dramatice, şi poate mai romantice, dintre cele ale marilor matematicieni.

Rezolvarea ecuațiilor

Istoria teoriei grupurilor începe cu preocupările vechilor babilonieni pentru ecuațiile pătratice. În ce-i priveşte pe babilonieni, metoda lor avea scopuri practice; era o tehnică de calcul, iar ei nu par să-şi fi pus întrebări mai adânci asupra ei. Dacă ştiai cum să găseşti rădăcinile pătrate şi stăpâneai aritmetica elementară, puteai rezolva ecuații pătratice.

Există indicii în tăblițele de lut că babilonienii s-au gândit şi la ecuațiile cubice, ba chiar şi la câteva ecuații cvartice. Grecii, iar după ei arabii, au descoperit metode geometrice de rezolvare a ecuațiilor cubice, bazate pe secțiunile conice. (Ştim azi că tradiționalele drepte şi cercuri euclidiene nu pot rezolva exact asemenea probleme. Era nevoie de ceva mai sofisticat, iar conicele îşi dovedeau utilitatea.) Una dintre figurile proeminente a fost persanul Omar Khayyám. Omar rezolva toate tipurile posibile de ecuații cubice prin metode geometrice sistematice. Dar, după cum am văzut, rezolvarea algebrică a ecuațiilor cubice şi cvartice a apărut abia în Renaştere, odată cu studiile lui del Ferro, Tartaglia, Fior, Cardano şi ale elevului său Ferrari.

Fără îndoială, formulele trebuiau să fie foarte complicate...

Tiparul ce părea să reiasă din toate acestea era clar, deşi detaliile erau complicate. Putem rezolva orice ecuație cvartică folosind operațiile aritmetice, plus rădăcini pătrate, cubice şi de ordinul patru -- acestea din urmă se reduceau la extragerea succesivă a două rădăcini pătrate. Părea plauzibil ca tiparul să continue, aşa încât să putem rezolva o ecuație cvintică folosind operațiile aritmetice, plus rădăcini pătrate, cubice, de ordinul patru şi cinci. Şi tot aşa, pentru ecuații de orice ordin. Fără îndoială, formulele trebuiau să fie foarte complicate, iar găsirea lor şi mai complicată, dar puțini se îndoiau că ele există.

Cu trecerea secolelor, fără vreun semn că s-ar găsi asemenea formule, câţiva mari matematicieni s-au hotărât să cerceteze mai îndeaproape întregul domeniu, să descopere ce se petrecea în culise, să unifice metodele cunoscute şi să le simplifice aşa încât să se vadă limpede de ce funcţionau. Apoi, credeau ei, trebuiau doar aplicate aceleaşi principii generale, iar cvintica îşi va dezvălui secretul.

Cel mai reuşit şi mai sistematic studiu în acest sens a fost întreprins de Lagrange. El a reinterpretat formulele clasice în funcţie de soluţiile căutate. Ceea ce conta, spunea el, era cum se comportau anumite expresii algebrice din aceste soluţii atunci când soluţiile erau permutate, adică rearanjate. Ştia că orice expresie complet simetrică – una care rămânea exact aceeaşi indiferent cum erau rearanjate soluţiile – putea fi exprimată în funcţie de coeficienţii ecuaţiei, devenind astfel o cantitate cunoscută. Mai interesante erau expresiile care nu luau decât un număr restrâns de valori diferite atunci când erau permutate soluţiile. Acestea păreau să deţină cheia pentru întreaga problemă a rezolvării ecuaţiei.

Puternicul său simţ al formei şi frumuseţii matematice i-a spus lui Lagrange că aceasta era o idee importantă. Dacă ceva asemănător putea fi găsit pentru ecuaţiile cubică şi cvartică, atunci ar fi putut afla cum să rezolve cvintica.

Folosind aceeaşi idee de bază, el a descoperit că expresii parţial simetrice în soluţiile ecuaţiei îi permiteau să reducă o ecuaţie cubică la una pătratică. Aceasta din urmă introducea o rădăcină pătrată, iar procesul de reducere putea fi încheiat folosind o rădăcină cubică. Analog, orice ecuaţie cvartică putea fi redusă la una cubică, pe care el a numit-o rezolventa cubică. O cvartică putea fi deci rezolvată folosind rădăcini pătrate şi cubice pentru a trata rezolventa cubică şi rădăcini de ordinul patru pentru a obţine de aici rezultatul dorit. În ambele cazuri, răspunsurile erau identice cu formulele clasice ale Renaşterii.

Dar acum Lagrange ştia de ce acelea erau răspunsurile şi, mai mult, de ce existau răspunsuri.

Şi într-adevăr aşa trebuiau să fie, fiindcă acelea erau răspunsurile. Dar acum Lagrange ştia de ce acelea erau răspunsurile şi, mai mult, de ce existau răspunsuri.

În acest stadiu al cercetării sale, trebuie să fi fost foarte emoţionat. Trecând la cvintică şi aplicând aceleaşi tehnici, se putea aştepta să obţină o rezolventă cvartică – misiune încheiată. Dar, spre dezamăgirea sa, n-a obţinut o rezolventă cvartică, ci o rezolventă sextică – o ecuţie de gradul şase. Metoda sa, în loc să simplifice ecuaţia cvintică, o complica.

Era o eroare de metodă? Exista o cale mai iscusită de a rezolva cvintica? Lagrange pare să fi crezut acest lucru. A scris că spera ca noua sa perspectivă

SIMETRIILE UNEI ECUAȚII PĂTRATICE

Să considerăm o ecuație pătratică de forma ușor simplificată

$$x^2 + px + q = 0$$

Să presupunem că soluțiile sunt $x = a$ și $x = b$

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$$

Aceasta ne spune atunci că $a + b = -p$ și $ab = q$

Așadar, deși nu cunoaștem încă soluțiile, cunoaștem suma și produsul lor – fără multă bătaie de cap.

De ce se întâmplă asta? Suma $a + b$ e aceeași cu $b + a$ – nu se schimbă atunci când soluțiile sunt permutate. Același lucru se întâmplă cu produsul $ab = ba$. Rezultă că *orice* expresie simetrică în raport cu cele două soluții poate fi exprimată prin coeficienții p și q. Invers, orice expresie în p și q e întotdeauna o funcție simetrică de a și b. Într-o perspectivă mai largă, relația dintre rădăcini și coeficienți e determinată de o proprietate de simetrie.

Funcțiile asimetrice nu se comportă în acest mod. Un bun exemplu este diferența $a - b$. Când îi schimbăm între ei pe a și b, ea devine $b - a$, care diferă de $a - b$. Dar – observație crucială – ea nu e *foarte* diferită. Este ceea ce obținem din $a - b$ schimbând semnul. Așa încât pătratul $(a - b)^2$ e complet simetric. Dar orice funcție complet simetrică de cele două soluții trebuie să fie o *anumită* expresie a coeficienților. Dacă extragem rădăcina pătrată, am exprimat pe $a - b$ cu ajutorul coeficienților, nefolosind nimic mai ezoteric decât o rădăcina pătrată. Îl cunoaștem deja pe $a + b$ – el este egal cu $-p$. Cum îl cunoaștem și pe $a - b$, suma acestor două numere este $2a$, iar diferența este $2b$. Împărțind la 2, obținem formulele pentru a și b.

Ceea ce am făcut este să arătăm că *există* o formulă pentru soluțiile a și b, care nu implică nimic mai ezoteric decât o rădăcina pătrată și se bazează pe proprietățile generale ale simetriilor expresiilor algebrice. Important e că am demonstrat că problema are o soluție, fără a intra în calculele complicate care ne spun care e această soluție. Într-un fel, ne-am dat seama de ce au putut babilonienii să găsească o metodă de rezolvare. Această mică poveste pune cuvântul „a înțelege" într-o nouă lumină. Puteți înțelege cum dă o soluție metoda babiloniană parcurgând pașii ei și verificând logica. Dar acum noi am înțeles de ce trebuia să existe o asemenea metodă – nu punând în evidență o soluție, ci examinând proprietățile *generale* ale presupuselor soluții. Aici proprietatea esențială s-a dovedit a fi simetria.

Cu ceva mai mult efort, conducând la o expresie explicită pentru $(a - b)^2$, această metodă oferă o formulă pentru soluții. Ea e echivalentă cu formula pe care am învățat-o la școală și cu metoda folosită de babilonieni.

să fie de folos oricui va încerca să rezolve cvintica. Nu pare să-i fi trecut prin minte că o asemenea metodă *putea să nu existe*, că abordarea lui eşuase fiindcă în general cvinticele *nu au* soluții „prin radicali" – adică expresii conținând operații aritmetice şi diverse rădăcini, cum ar fi rădăcinile de ordinul cinci. Pentru a încurca lucrurile, *unele* cvintice au asemenea soluții, de exemplu, $x^5 - 2 = 0$ are soluția $x = \sqrt[5]{2}$. Dar acesta e un caz simplu, nu unul cu adevărat tipic.

De fapt, toate ecuațiile cvintice au soluții; în general, acestea sunt numere complexe, iar ele pot fi calculate numeric oricât de precis. Problema era găsirea unor formule algebrice ale soluțiilor.

Căutarea soluției

Când ideile lui Lagrange au început să fie cunoscute, câştiga teren ideea că pesemne problema nu putea fi rezolvată. Pesemne că ecuația cvintică generală nu putea fi rezolvată prin radicali. Gauss pare să fi crezut asta, dar a declarat că problema nu merita abordată. A fost unul dintre puținele cazuri în care l-a trădat intuiția lui privind ceea ce e important; un altul a fost Marea Teoremă a lui Fermat, dar metodele necesare îl depăşeau până şi pe Gauss, şi au trebuit să treacă două secole ca să apară. Gauss elaborase totuşi deja o parte din algebra necesară pentru a demonstra insolubilitatea cvinticei. El o introdusese în lucrarea sa privind construcția poligoanelor regulate cu rigla şi compasul, iar tot aici crease un precedent demonstrând (pentru sine, cel puțin) că anumite poligoane nu puteau fi construite astfel. Poligonul regulat cu 9 laturi era un exemplu. Gauss cunoştea acest rezultat, dar nu i-a scris niciodată demonstrația; o demonstrație a fost dată ceva mai târziu de Pierre Wantzel. Astfel, Gauss crease un precedent pentru afirmația că anumite probleme puteau să nu fie rezolvabile prin metode particulare.

Primul care a încercat o demonstrație a imposibilității a fost Paolo Ruffini, care a devenit profesor de matematică la Universitatea din Modena în 1789. Urmând ideile lui Lagrange privind funcțiile simetrice, Ruffini s-a convins că nu există nici o formulă care să nu implice decât rădăcini şi care să rezolve cvintica. În cartea sa *Teoria generală a ecuațiilor* din 1799 a dat o demonstrație a faptului că „rezolvarea algebrică a ecuațiilor generale de grad mai mare decât patru este întotdeauna imposibilă". Demonstrația era însă atât de lungă – 500 de pagini –, încât nimeni n-a fost dispus s-o verifice, mai ales că circulau zvonuri despre existența unor erori. În 1803 Ruffini a publicat o nouă demonstrație, mai simplă, dar nici ea n-a avut o soartă mai bună. În timpul vieții

sale, lui Ruffini nu i s-a recunoscut meritul de a fi demonstrat insolvabilitatea ecuației de gradul cinci.

Cea mai importantă contribuție a lui Ruffini a fost înțelegerea faptului că permutările puteau fi combinate între ele. Până atunci, o permutare era o rearanjare a unei anumite colecții de simboluri. De exemplu, dacă numerotăm rădăcinile unei cvintice prin 12345, atunci aceste simboluri pot fi rearanjate ca 54321 sau 42153 sau 23154 etc. Există 120 de aranjamente posibile. Ruffini a înțeles că o asemenea rearanjare putea fi privită în alt mod: ca o rețetă de a rearanja *orice altă mulțime* de cinci simboluri. Ideea era de a compara ordinea standard 12345 cu ordinea rearanjată. Ca un exemplu simplu, să presupunem că noua ordine e 54321. Atunci regula pentru a obține din ordinea inițială noua ordine e simplă: inversați-o. Dar puteți inversa ordinea *oricărui* şir de cinci simboluri. Dacă simbolurile sunt *abcde*, ordinea inversă este *edcba*. Dacă simbolurile sunt inițial 23451, atunci inversa este 15432. Acest nou mod de a privi o permutare însemna că se puteau efectua două permutări succesive – un fel de înmulțire a permutărilor. Algebra permutărilor, înmulțite în acest fel, conținea cheia secretului cvinticei.

Abel

Ştim astăzi că exista o eroare tehnică în demonstrația lui Ruffini, dar ideile principale erau corecte, iar lacuna poate fi umplută. El a obținut un lucru: cartea lui a condus la senzația vagă, dar larg răspândită, că ecuația de gradul cinci nu e rezolvabilă prin radicali. Aproape nimeni nu credea că Ruffini ar fi *demonstrat* acest fapt, dar matematicienii au început să se îndoiască de existența unei soluții. Din păcate, principalul efect al acestei credințe a fost de a-i descuraja să lucreze la această problemă.

Excepție a făcut Abel, un tânăr norvegian cu un talent matematic precoce, care credea că a rezolvat cvintica pe când era încă la şcoală. În cele din urmă a descoperit o greşeală, dar a rămas fascinat de problemă şi a continuat să lucreze intermitent la ea. În 1823 a găsit o demonstrație a imposibilității rezolvării cvinticei, demonstrație perfect corectă. Abel a folosit o strategie asemănătoare cu a lui Ruffini, dar tactica lui era mai bună. La început nu cunoştea lucrarea lui Ruffini, dar mai târziu e limpede că a cunoscut-o, însă a spus că e incompletă, fără să se refere la vreo problemă anume a demonstrației lui Ruffini. Ca o ironie, unul dintre paşii demonstrației lui Abel este exact cel necesar pentru a umple lacuna din cea a lui Ruffini.

Ne putem face o idee privind metodele lui Abel fără a intra în prea multe detalii. El a abordat problema distingând două tipuri de operații algebrice. Să presupunem că începem cu diferite cantități – ele pot fi anumite numere sau expresii algebrice în diverse necunoscute. Cu ele putem forma multe alte cantități. Calea cea mai simplă de a face acest lucru este de a combina cantitățile existente adunându-le, scăzându-le, înmulțindu-le sau împărțindu-le. Astfel, de la o singură necunoscută, x, putem crea expresii ca x^2, $3x + 4$ sau $\frac{x+7}{2x-3}$. Din punct de vedere algebric, toate aceste expresii au același statut ca și x.

A doua cale de a obține noi cantități pornind de la cele existente este de a folosi radicali. Să luăm una din modificările inofensive ale cantităților existente și să extragem o anumită rădăcină. Un asemenea pas se va numi adjuncționare a unui radical. Dacă el este o rădăcină pătrată, vom spune că gradul radicalului este 2, dacă e o rădăcină cubică, atunci gradul este 3 ș.a.m.d.

În acești termeni, formula lui Cardano pentru ecuația cubică poate fi privită ca rezultatul unei proceduri în doi pași. Începem cu coeficienții ecuației cubice (și cu orice combinație inofensivă a lor). Adjuncționăm un radical de ordin 2. Apoi adjuncționăm un radical de ordin 3. Cu asta am terminat. Această descriere ne spune ce *tip* de formulă apare, dar nu și care e ea. Deseori cheia răspunsului la o problemă matematică este să nu ne concentrăm asupra detaliilor, ci să privim trăsăturile principale. Mai puțin poate însemna mai mult. Atunci când funcționează, această stratagemă e spectaculoasă, iar aici a funcționat de minune. Ea i-a permis lui Abel să reducă orice formulă ipotetică de rezolvare a cvinticei la pașii ei esențiali: extragerea unui șir de radicali, într-o anumită ordine, cu diferite grade. E întotdeauna posibil să aranjăm gradele așa încât să fie prime – de pildă, o rădăcină de ordinul șase este rădăcina cubică a unei rădăcini pătrate.

Să numim un asemenea șir *turn de radicali*. O ecuație e rezolvabilă prin radicali dacă cel puțin una dintre soluțiile ei poate fi exprimată printr-un turn de radicali. Dar în loc să încerce să găsească un turn de radicali, Abel a presupus pur și simplu că există un turn de radicali și s-a întrebat cum trebuia să arate ecuația inițială.

Atunci când funcționează, această stratagemă e spectaculoasă, iar aici a funcționat de minune.

Fără să-și dea seama, Abel a umplut acum lacuna din demonstrația lui Ruffini. El a arătat că, ori de câte ori o ecuație poate fi rezolvată prin radicali, trebuie să existe un turn de radicali conducând la acea soluție, conținând doar coeficienții ecuației inițiale. Aceasta se numește

Teorema Iraționalităților Naturale și ea afirmă că nu se poate câștiga nimic prin includerea unui întreg maldăr de noi cantități, fără legătură cu coeficienții inițiali. Lucrul acesta ar trebui să fie evident, dar Abel a înțeles că în multe privințe este pasul crucial al demonstrației.

Cheia demonstrației lui Abel privind imposibilitatea este un subtil rezultat preliminar. Să presupunem că luăm o expresie conținând soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ale ecuației și extragem rădăcina ei de ordin p, pentru un anumit număr prim p. Să mai presupunem că expresia inițială e neschimbată când aplicăm două permutări particulare

$$S\colon x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \longrightarrow x_2, x_3, x_1, x_4, x_5$$

și

$$T\colon x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \longrightarrow x_1, x_2, x_4, x_5, x_3$$

Atunci, a arătat Abel, rădăcina de ordin p a acestei expresii este *de asemenea* neschimbată când aplicăm pe S și T. Acest rezultat preliminar a condus direct la demonstrația teoremei imposibilității prin „urcarea în turn" pas cu pas. Să presupunem că ecuația cvintică e rezolvabilă prin radicali, așa încât există un turn de radicali care începe cu coeficienții și urcă până sus, ajungând la o soluție.

Primul etaj al turnului – expresiile inofensive conținând coeficienții – este neschimbat când aplicăm permutările S și T, deoarece acestea permută soluțiile, nu coeficienții. Deci, conform rezultatului preliminar al lui Abel, al doilea etaj al turnului este *de asemenea* neschimbat când aplicăm pe S și T, deoarece se ajunge la el prin adjuncția unei rădăcini de ordin p a unei cantități de la primul etaj, unde p este prim. Cu același raționament, cel de-al treilea etaj al turnului este neschimbat când aplicăm pe S și T. La fel este al patrulea etaj, al cincilea... și tot așa până la etajul din vârf.

Dar etajul din vârf conține o anumită soluție a ecuației. Ar putea ea fi x_1? Dacă s-ar întâmpla acest lucru, atunci x_1 ar trebui să rămână neschimbată când aplicăm S. Dar S aplicată lui x_1 o dă pe x_2, nu pe x_1. Din motive asemănătoare, folosind uneori pe T, soluția definită de turnul considerat nu poate fi nici x_2, x_3, x_4 sau x_5. *Toate cele cinci soluții* sunt excluse din orice astfel de turn – așadar, ipoteticul turn nu poate conține vreo soluție.

Nu există scăpare din această capcană logică. Ecuația de gradul cinci e insolubilă deoarece orice soluție (prin radicali) ar trebui să aibă proprietăți contradictorii, deci nu poate exista.

Galois

Investigarea nu doar a cvinticei, ci a tuturor ecuațiilor algebrice a fost preluată de Évariste Galois, una dintre cele mai tragice figuri din istoria matematicii. Galois şi-a propus să determine care ecuații puteau fi rezolvate prin radicali şi care nu. Ca mulți dintre predecesorii săi, el a înțeles că secretul rezolvării algebrice a ecuațiilor era modul în care se comportau soluțiile atunci când erau permutate. Problema era una de simetrie.

Ruffini şi Abel înțeleseseră că o expresie depinzând de aceste soluții nu trebuia să fie neapărat simetrică sau nesimetrică. Putea fi parțial simetrică: modificată de anumite permutări, dar nu şi de altele. Galois a observat că permutările care lasă invariantă o anumită expresie a rădăcinilor au o caracteristică simplă. Dacă luați orice două permutări care lasă invariantă expresia şi le înmulțiți între ele, rezultatul *lasă şi el invariantă* expresia. El a numit un astfel de sistem de permutări *grup*. Odată ce ți-ai dat seama că lucrul acesta e adevărat, el e foarte uşor de demonstrat. Totul e să-l observi şi să-i recunoşti semnificația.

Concluzia lui Galois este că ecuația de gradul cinci nu poate fi rezolvată prin radicali deoarece are *tipul prost* de simetrii. Grupul unei ecuații cvintice generale constă din toate permutările celor cinci soluții. Structura algebrică a acestui grup e incompatibilă cu o rezolvare prin radicali.

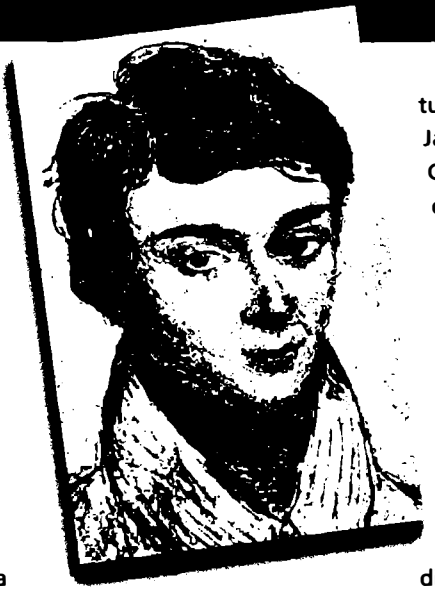
Galois a lucrat în mai multe alte domenii ale matematicii, făcând descoperiri la fel de profunde. În particular, el a generalizat aritmetica modulară pentru a clasifica ceea ce noi numim azi *corpurile Galois*. Acestea sunt sisteme finite în care pot fi definite operațiile aritmetice de adunare, scădere, înmulțire şi împărțire, putând fi aplicate toate regulile uzuale. Numărul elementelor unui corp Galois este totdeauna puterea unui număr prim şi există exact un corp Galois pentru fiecare putere a unui prim.

Jordan

Noțiunea de grup a apărut pentru prima dată într-o formă clară în opera lui Galois, deşi existau indicii anterioare în amplele scrieri ale lui Ruffini şi în elegantele cercetări ale lui Lagrange. La un deceniu după ce, grație lui Liouville, ideile lui Galois deveniseră larg accesibile, matematica se afla în posesia unei bine dezvoltate *teorii a grupurilor*. Principalul arhitect al acestei teorii a fost Camille Jordan, a cărui carte de 667 pagini *Traité des Substitutions et des Équations Algébriques* a fost publicată în 1870. Jordan a prezentat întregul subiect într-o manieră sistematică şi cuprinzătoare.

Évariste Galois

1811–1832



Évariste Galois a fost fiul lui Nicolas Gabriel Galois şi al Adelaidei Marie Demante. A crescut în Franţa revoluţionară, căpătând convingeri pronunţate de stânga. Marea lui contribuţie la matematică a rămas nerecunoscută până la 14 ani de la moartea sa.

Revoluţia Franceză începuse prin căderea Bastiliei în 1789 şi execuţia lui Ludovic al XVI-lea în 1793. La 1804 Napoleon Bonaparte se proclamase împărat, dar după o serie de înfrângeri militare a fost obligat să abdice, iar monarhia a fost restaurată în 1814 sub Ludovic al XVIII-lea. În 1824, Ludovic murise, iar rege era acum Carol al X-lea.

În 1827 Galois a început să manifeste un neobişnuit talent – şi o obsesie – pentru matematică. A încercat să intre la École Polytechnique, dar a picat la examen. În 1829 tatăl lui, primar al unui orăşel, s-a spânzurat după ce adversarii săi politici i-au înscenat un scandal. La scurt timp, Galois a mai încercat o dată să intre la École Polytechnique şi iar a eşuat, intrând în schimb la École Normale.

În 1830, Galois şi-a înaintat studiile sale privind rezolvarea ecuaţiilor algebrice pentru un premiu oferit de Academia de Ştiinţe. Referentul, Fourier, a murit curând, iar lucrarea s-a pierdut. Premiul i-a fost acordat lui Abel (care tocmai murise de tuberculoză) şi lui Carl Jacobi. În acelaşi an, Carol al X-lea a fost detronat şi a fugit pentru a-şi salva viaţa. Directorul de la École Normale şi-a încuiat elevii pentru a-i împiedica să se alăture luptelor de stradă. Furios, Galois a scris o scrisoare sarcastică acuzându-l pe director de laşitate şi a fost imediat exmatriculat.

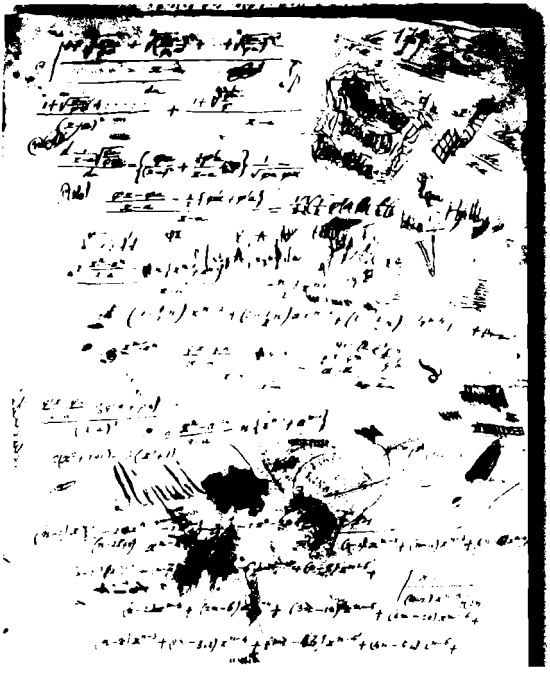
Ca o soluţie de compromis, Ludovic-Filip a fost proclamat rege. Galois a intrat într-o miliţie republicană, Artileria Gărzii Naţionale, dar regele a desfiinţat-o. Nouăsprezece dintre ofiţerii Gărzii au fost arestaţi şi judecaţi pentru revoltă, dar juriul a respins acuzaţiile, iar Garda a dat un dineu pentru a sărbători achitarea lor. Galois a propus un toast ironic pentru rege, ţinând în mână un cuţit. A fost arestat, dar achitat deoarece (aşa susţinea el) toastul fusese „Lui Ludovic-Filip, dacă trădează", iar nu o ameninţare la viaţa regelui. Dar de Ziua Bastiliei Galois a fost din nou arestat, deoarece purtase uniforma acum ilegală a Gărzii.

În închisoare a aflat ce se întâmplase cu lucrarea sa. Poisson o respinsese pe motiv că nu era suficient de clară. Galois a încercat să se sinucidă, dar ceilalţi deţinuţi l-au oprit. Ura lui faţă de oficialităţi devenise acum extremă, iar el dădea

semne de paranoia. Când s-a declanşat o epidemie de holeră deţinuţii au fost eliberaţi.

În acel moment Galois s-a îndrăgostit de o femeie al cărui nume va rămâne pentru mulţi ani un mister; s-a dovedit că era Stéphanie du Motel, fiica unui doctor care locuia în aceeaşi casă cu Galois. Idila nu progresa, iar Stéphanie i-a pus capăt. Unul dintre camarazii revoluţionari ai lui Galois l-a provocat atunci la duel, aparent din cauza Stéphaniei. O teorie plauzibilă, avansată de Tony Rothman, este că adversarul a fost Ernest Duchâtelet, care fusese închis împreună cu Galois. Duelul pare să fi fost un fel de ruletă rusească, implicând alegerea la întâmplare dintre două pistoale, din care numai unul era încărcat, şi trasul de la foarte mică distanţă. Galois a ales pistolul neîncărcat, a fost împuşcat în stomac şi a murit a doua zi.

În noaptea dinaintea duelului a scris un lung rezumat al ideilor sale matematice, incluzând o descriere a demonstraţiei sale că ecuaţiile de gradul 5 sau mai mare nu pot fi rezolvate prin radicali. În această lucrare a dezvoltat noţiunea de grup de permutări şi a făcut primii paşi importanţi spre teoria grupurilor. Manuscrisul era pe punctul să se piardă, dar a ajuns în mâinile lui Joseph Liouville, un membru al Academiei. În 1843 Liouville s-a adresat Academiei spunând că a găsit în hârtiile lui Galois o soluţie „pe cât de corectă, pe atât de profundă a acestei frumoase probleme: dându-se o ecuaţie ireductibilă de grad prim, să se decidă dacă ea este sau nu rezolvabilă prin radicali". Liouville a publicat rezultatele lui Galois în 1845, făcându-le în sfârşit accesibile comunităţii matematice.



Fragment dintr-un manuscris al lui Évariste Galois

La ce i-a ajutat teoria grupurilor

Una dintre primele aplicații serioase ale teoriei grupurilor în știință a fost clasificarea tuturor structurilor cristaline posibile. Atomii dintr-un cristal formează o rețea regulată tridimensională, iar principala problemă matematică este enumerarea tuturor grupurilor de simetrie posibile ale unor asemenea rețele, deoarece ele formează efectiv simetriile cristalului.
În 1891 Evgraf Fedorov și Arthur Schönflies au demonstrat că există exact 230 de grupuri cristalografice distincte. William Barlow obținuse o listă similară, dar incompletă.
Tehnicile moderne de găsire a structurii moleculelor biologice, cum ar fi proteinele, se bazează pe trecerea unor raze X printr-un cristal format de molecula respectivă și observarea tiparelor de difracție rezultate. Simetriile cristalului sunt importante pentru deducerea formei moleculei studiate. La fel și analiza Fourier.

Preocuparea lui Jordan pentru teoria grupurilor a început în 1867, când a pus în evidență legătura profundă cu geometria, clasificând tipurile fundamentale de mișcare ale unui corp rigid în spațiul euclidian. Încă mai important, el a făcut o foarte bună încercare de clasificare a modurilor în care aceste mișcări pot fi combinate pentru a forma grupuri. Principala lui motivație era cercetarea cristalografică a lui Auguste Bravais, care a inițiat studiul matematic al simetriei cristalelor. Lucrările lui Jordan au generalizat rezultatele lui Bravais. El și-a anunțat clasificarea în 1867 și a publicat detaliile ei în 1868–1869.

Tehnic vorbind, Jordan a lucrat numai cu grupuri închise, în care limita oricărui șir de mișcări dintr-un grup este și ea o mișcare din acel grup. Între acestea se numără toate grupurile finite, din motive evidente, și de asemenea grupuri cum ar fi toate rotațiile unui cerc în jurul centrului său. Un exemplu tipic de grup ne-închis, neluat în considerare de Jordan, ar fi cel al tuturor rotațiilor unui cerc în jurul centrului său cu multipli raționali de 360°. Acest grup există, dar nu satisface proprietatea-limită, pentru că, de pildă, nu include rotația cu $360 \times \sqrt{2}$ grade, fiindcă $\sqrt{2}$ nu e rațional. Grupurile ne-închise de mișcări sunt extrem de variate și aproape sigur dincolo de orice clasificare cu sens. Cele închise sunt abordabile, dar dificile.

Principalele mișcări rigide în plan sunt translațiile, rotațiile, reflexiile și reflexiile cu translație. În spațiul tridimensional mai întâlnim și mișcări *elicoidale*,

precum mișcarea unui burghiu: obiectul e translatat de-a lungul unei axe fixe și simultan rotit în jurul acelei axe.

Jordan a început cu grupurile de translație, și a enumerat zece tipuri, toate formate din combinații de translații continue (cu distanțe arbitrare) în anumite direcții și translații discrete (cu multipli întregi ai unei distanțe fixe) în alte direcții. El a enumerat și principalele grupuri finite de rotații și reflexii: ciclice, diedrale, tetraedrale, octaedrale și icosaedrale. A distins grupul $O(2)$ al tuturor rotațiilor și reflexiilor care lasă nemișcată o dreaptă din spațiu, *axa*, și grupul $O(3)$ al tuturor rotațiilor și reflexiilor care lasă nemișcat un punct din spațiu, *centrul*.

Dar cercetările sale au fost un pas important spre înțelegerea mișcărilor euclidiene rigide...

Ulterior a devenit clar că lista lui era incompletă. De exemplu, omisese unele dintre grupurile cristalografice mai subtile din spațiul tridimensional. Dar cercetările sale au fost un pas important spre înțelegerea mișcărilor euclidiene rigide, care sunt importante în mecanică, precum și în matematica pură.

Cartea lui Jordan e într-adevăr exhaustivă. Ea începe cu aritmetica modulară și corpurile Galois, care, în afară de faptul că reprezintă exemple de grupuri, constituie și instrumentul esențial pentru tot restul cărții. Treimea mediană se ocupă cu grupurile de permutări, pe care Jordan le numește substituții. El stabilește ideile de bază ale subgrupurilor normale, cele folosite de Galois pentru a arăta că grupul de simetrie al cvinticei e incompatibil cu o rezolvare prin radicali, și demonstrează că aceste subgrupuri pot fi folosite pentru a descompune un grup general în părți mai simple. El arată că dimensiunile acestor părți nu depind de modul în care e descompus grupul inițial. În 1889 Otto Hölder a îmbunătățit acest rezultat, interpretând părțile ca grupuri de sine stătătoare, și a demonstrat că nu numai dimensiunea părților, ci și structura lor de grup e independentă de modul în care e descompus grupul. În prezent acest rezultat e cunoscut sub numele de Teorema Jordan–Hölder.

Un grup este *simplu* dacă nu se descompune în acest mod. Teorema Jordan–Hölder ne spune că raporturile dintre grupurile simple și cele generale sunt aceleași ca raporturile dintre atomi și moleculele din chimie. Grupurile simple sunt constituenții atomici ai tuturor grupurilor. Jordan a demonstrat că grupul altern A_n, format din toate permutările a n simboluri care schimbă între ele un număr par de perechi de simboluri, este simplu dacă $n \geq 5$. Din perspectiva teoriei grupurilor, acesta e motivul pentru care ecuația de gradul cinci nu e rezolvabilă prin radicali.

O altă extensie importantă a fost teoria substituțiilor liniare a lui Jordan. Aici transformările care alcătuiesc grupul nu sunt permutări ale unei mulțimi

finite, ci transformări liniare ale unei liste finite de variabile. De exemplu, trei variabile x, y, z pot fi transformate în noile variabile X, Y, Z prin intermediul unor ecuații liniare

$$X = a_1x + a_2y + a_3z$$
$$Y = b_1x + b_2y + b_3z$$
$$Z = c_1x + c_2y + c_3z$$

unde a_i, b_i, c_i (cu $i = 1, 2, 3$) sunt constante. Pentru a face ca grupul să fie finit, Jordan lua de obicei aceste constante ca elemente ale întregilor modulo un anumit număr prim sau, mai general, ale unui corp Galois.

Tot în 1869 Jordan şi-a elaborat propria versiune privind teoria lui Galois şi a inclus-o în tratatul său. A demonstrat că o ecuație e rezolvabilă dacă şi numai dacă grupul ei este solubil, adică toate componentele lui simple au ordin prim. El a aplicat teoria lui Galois la probleme geometrice.

Simetria

Încercările vechi de 4000 de ani de a rezolva ecuații algebrice de gradul cinci s-au oprit brusc atunci când Ruffini, Abel şi Galois au demonstrat că nu e posibilă o rezolvare prin radicali. Deşi era un rezultat negativ, a avut o uriaşă influență asupra dezvoltării ulterioare atât a matematicii, cât şi a ştiinței. Aceasta s-a întâmplat deoarece metoda introdusă pentru a demonstra imposibilitatea s-a dovedit esențială pentru înțelegerea matematică a simetriei, iar simetria s-a dovedit fundamentală în matematică şi în ştiință.

Efectele au fost profunde. Teoria grupurilor a condus la o perspectivă mai abstractă asupra algebrei, iar odată cu ea la o perspectivă mai abstractă asupra matematicii. Deşi mulți reprezentanți ai ştiinței aplicate s-au opus inițial tendinței spre abstractizare, în cele din urmă a devenit limpede că metodele abstracte sunt deseori mai puternice decât cele concrete, iar cea mai mare parte a opoziției a dispărut. Teoria grupurilor a arătat de asemenea că rezultatele negative pot fi totuşi importante şi că insistența în privința demonstrării lor poate conduce uneori la mari descoperiri. Să presupunem de pildă că matematicienii ar fi acceptat pur şi simplu fără demonstrație imposibilitatea rezolvării ecuației de gradul cinci, pe motivul plauzibil că nimeni nu putuse găsi o rezolvare. Atunci nu s-ar mai fi inventat teoria grupurilor pentru a explica de ce nu poate fi ea rezolvată. Dacă matematicienii ar fi ales calea uşoară şi ar fi presupus că rezolvarea e imposibilă, matematica şi ştiința ar fi fost o palidă umbră a ceea ce sunt ele azi.

De aceea insistă matematicienii asupra demonstrațiilor.

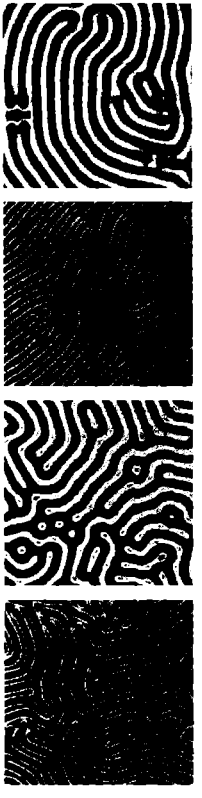
La ce ne ajută teoria grupurilor

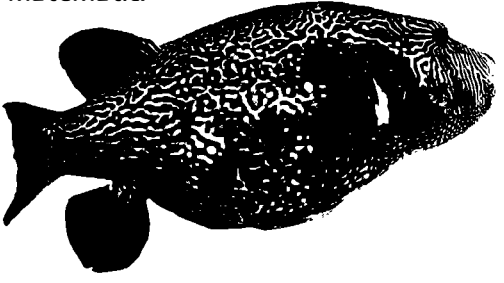
În prezent, teoria grupurilor e indispensabilă în întreaga matematică, iar în știință e larg folosită. În particular, ea apare în teoriile privind formarea tiparelor în diverse contexte.

Un exemplu e teoria ecuațiilor de reacție-difuzie, introdusă de Alan Turing în 1952 ca posibilă explicație a tiparelor care apar în petele animalor. În aceste ecuații, un sistem de substanțe chimice poate difuza într-o regiune din spațiu, iar substanțele pot de asemenea reacționa pentru a produce noi substanțe. Turing a sugerat că un proces de acest tip ar putea crea un pretipar în embrionul unui animal în evoluție, care ulterior s-ar transforma în pigmenți, dezvăluind tiparul la adult.

Să presupunem, pentru simplitate, că regiunea e un plan. Atunci ecuațiile sunt simetrice în raport cu toate mișcările rigide. Singura soluție a ecuațiilor care e simetrică în raport cu toate mișcările rigide e o stare uniformă, aceeași pretutindeni. Aceasta s-ar traduce printr-un animal fără nici un fel de pete, cu aceeași culoare peste tot. Dar starea uniformă poate fi instabilă, caz în care soluția reală va fi simetrică în raport cu anumite mișcări rigide, dar nu și cu altele. Acest proces se numește *ruperea simetriei*.

Un model tipic de rupere a simetriei în plan constă în dungi paralele. Altul e un aranjament regulat de pete. Sunt posibile și tipare mai complicate. E interesant că, la animale, petele și dungile sunt printre cele mai comune, iar multe dintre tiparele matematice mai complicate pot fi de asemenea întâlnite. Procesul biologic real, implicând efecte genetice, trebuie să fie mai complicat decât a presupus Turing, dar mecanismul de rupere a simetriei trebuie să fie foarte asemănător din punct de vedere matematic.





Un model matematic și un pește arătând amândoi marcaje de tip Turing

14

Numerele sunt înlocuite cu structuri

Pe la 1860 teoria grupurilor de permutări era bine dezvoltată. Teoria invarianților – expresii algebrice care nu se schimbă la anumite transformări de variabilă – atrăsese atenția asupra diverselor mulțimi infinite de transformări, cum ar fi grupul proiectiv al tuturor proiecțiilor spațiului. În 1868 Camille Jordan studiase grupurile mişcărilor din spațiul tridimensional, iar cele două fire au început să se împletească.

Noțiuni sofisticate

A apărut un nou tip de algebră, în care obiectele de studiu nu erau numere necunoscute, ci noțiuni mai sofisticate: permutări, transformări, matrice. Procesele de anul trecut deveniseră obiectele anului acesta. Regulile de mult stabilite ale algebrei trebuiau să fie deseori modificate pentru a se adapta la nevoile noilor structuri. Pe lângă grupuri, matematicienii au început să studieze structuri numite inele şi corpuri, împreună cu diverse algebre.

Un imbold pentru această nouă perspectivă asupra algebrei a venit dinspre ecuațiile cu derivate parțiale, mecanică şi geometrie: dezvoltarea grupurilor Lie şi a algebrelor Lie. Altă sursă de inspirație a fost teoria numerelor: numerele algebrice puteau fi folosite pentru a rezolva ecuațiile diofantice, pentru a înțelege legile de reciprocitate şi chiar pentru a ataca Marea Teoremă a lui Fermat. Apogeul acestor eforturi a fost demonstrația dată în 1995 de Andrew Wiles Marii Teoreme a lui Fermat.

Lie și Klein

În 1869 matematicianul norvegian Sophus Lie s-a împrietenit cu matematicianul prusac Felix Klein. Ei aveau un interes comun pentru geometria dreptei, ramură a geometriei proiective introdusă de Julius Plücker. Lie a avut o idee extrem de originală: teoria ecuațiilor algebrice a lui Galois ar trebui să aibă un analog pentru ecuațiile diferențiale. O ecuație algebrică poate fi rezolvată prin radicali doar dacă posedă tipul necesar de simetrii – adică are un grup Galois solubil. Analog, presupunea Lie, o ecuație diferențială poate fi rezolvată prin metode clasice doar dacă rămâne neschimbată în raport cu o familie de transformări continue. Lie şi Klein au lucrat la variante ale acestei idei în 1869–1870, iar în 1872, în programul său de la Erlangen, Klein a ajuns să caracterizeze geometria drept setul invarianților unui grup.

Acest program s-a născut dintr-o nouă perspectivă asupra geometriei euclidiene, în funcție de simetriile ei. Jordan arătase deja că simetriile planului euclidian sunt mișcări rigide de diverse tipuri: translații, care fac ca planul să alunece într-o anumită direcție; rotații, care-l învârt în jurul unui punct fix; reflexii, care-l oglindesc în raport cu o dreaptă fixată; și, mai puțin evidente, reflexii cu translații, care-l reflectă și apoi îl translatează într-o direcție perpendiculară pe dreapta de oglindire. Aceste transformări formează un grup, *grupul euclidian,* și ele sunt rigide în sensul că nu modifică distanțele. De aceea ele nu modifică nici unghiurile. Dar lungimile și unghiurile sunt conceptele fundamentale ale geometriei euclidiene. Klein a înțeles că aceste concepte sunt invarianții grupului euclidian, cantitățile care nu se schimbă când se aplică o transformare a grupului. Cunoscând grupul euclidian, îi putem deduce invarianții, iar din aceștia obținem geometria euclidiană.

Același lucru e valabil pentru orice tip de geometrie. Geometria eliptică e studiul invarianților grupului mișcărilor rigide într-un spațiu curbat pozitiv, geometria hiperbolică e studiul invarianților grupului mișcărilor rigide într-un spațiu curbat negativ, geometria proiectivă e studiul invarianților grupului proiecțiilor etc. La fel cum coordonatele leagă algebra de geometrie, invarianții leagă teoria grupurilor de geometrie. Fiecare geometrie definește un grup corespunzător, grupul transformărilor care lasă neschimbate noțiunile geometrice relevante. Invers, orice grup de transformări definește o geometrie corespunzătoare, cea a invarianților.

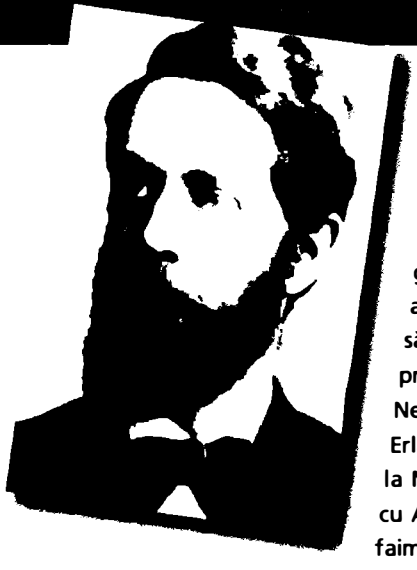
Klein a folosit această corespondență pentru a demonstra că anumite geometrii erau esențialmente aceleași cu altele, întrucât grupurile lor erau identice, diferind doar interpretarea lor. Mesajul mai profund este că orice geometrie e definită de simetriile ei. Există și o excepție: geometria riemanniană a suprafețelor a căror curbură se poate schimba de la un punct la altul. Ea nu se integra în programul lui Klein.

Grupurile Lie

Cercetările comune ale lui Lie și Klein l-au făcut pe Lie să introducă una dintre marile idei ale matematicii moderne, cea de grup continuu de transformări, numit azi *grup Lie.* Este un concept care a revoluționat deopotrivă matematica și fizica, deoarece grupurile Lie surprind multe dintre cele mai importante simetrii ale universului fizic, iar simetria e un puternic principiu de organizare – atât pentru filozofia care stă la baza modului în care ne reprezentăm matematic natura, cât și pentru calcule tehnice.

Felix Klein

1849–1925



Klein s-a născut la Düsseldorf într-o familie aristocratică – tatăl lui era secretarul şefului guvernului prusac. S-a înscris la Universitatea din Bonn, plănuind să devină fizician, dar a fost asistentul lui Julius Plücker. Plücker trebuia să lucreze în matematică şi fizică experimentală, însă preocupările lui se concentraseră asupra geometriei, iar Klein s-a aflat sub influenţa sa. Teza lui Klein din 1868 era despre geometria dreptei aplicată în mecanică.

Pe la 1870 lucra împreună cu Lie în teoria grupurilor şi geometrie diferenţială. În 1871 a descoperit că geometria neeuclidiană e geometria unei suprafeţe proiective cu o anume secţiune conică. Acest fapt demonstra, direct şi simplu, că geometria neeuclidiană e necontradictorie dacă geometria euclidiană e necontradictorie, ceea ce a pus capăt controversei privind statutul geometriei neeuclidiene.

În 1872 Klein a fost numit profesor la Erlangen, iar în programul său din 1872 a unificat aproape toate tipurile cunoscute de geometrie şi a lămurit legăturile dintre ele, considerând geometria ca fiind invarianţii unui grup de transformări. Geometria a devenit astfel o ramură a teoriei grupurilor. A scris acest articol pentru discursul său inaugural, dar nu l-a prezentat cu acel prilej. Nesimţindu-se bine la Erlangen, în 1875 s-a mutat la München. S-a căsătorit cu Anna Hegel, nepoata faimosului filozof. Cinci ani mai târziu s-a dus la Leipzig, unde cariera sa matematică a atins apogeul.

Klein credea că principalele sale contribuţii erau în teoria funcţiilor complexe, unde făcuse studii aprofundate asupra funcţiilor invariante în raport cu diverse grupuri de transformări ale planului complex. În particular, a elaborat în acest context teoria grupului simplu de ordin 168. A intrat în competiţie cu Poincaré pentru rezolvarea problemei uniformizării funcţiilor complexe, dar starea sănătăţii lui s-a înrăutăţit, pesemne din pricina marilor eforturi depuse.

În 1886 Klein a fost numit profesor la Universitatea din Göttingen şi s-a concentrat asupra organizării ei, formând una dintre cele mai bune şcoli de matematică din lume. A rămas acolo până în 1913, când a ieşit la pensie.

Sophus Lie a creat teoria grupurilor Lie într-un puseu de activitate, începând cu toamna lui 1873. Conceptul de grup Lie a evoluat considerabil de la primele sale lucrări. În termeni moderni, un grup Lie e o structură având atât proprietăți algebrice, cât şi topologice, între cele două existând o legătură. Mai exact, este un grup (o mulțime cu o operație de compoziție satisfăcând diverse identități algebrice, între care asociativitatea) şi o varietate topologică (un spațiu care local seamănă cu spațiul euclidian de o anumită dimensiune, dar care, la nivel global, poate fi curbat sau distorsionat altfel), aşa încât legea de compoziție să fie continuă (schimbări mici ale elementelor care se compun produc schimbări mici ale rezultatului). Ideea lui Lie era mai concretă: un grup de transformări continue în mai multe variabile. El a ajuns să studieze asemenea grupuri de transformări în timp ce căuta o teorie privind rezolvabilitatea sau nerezolvabilitatea ecuațiilor diferențiale, analogă cu cea a lui Évariste Galois pentru ecuații algebrice, dar astăzi ele apar într-o mare diversitate de contexte matematice, iar motivația inițială a lui Lie nu e cea mai importantă aplicație.

Motivația inițială a lui Lie nu e cea mai importantă aplicație.

Poate că cel mai simplu exemplu de grup Lie e mulțimea rotațiilor unui cerc. Fiecare rotație este unic determinată de un unghi între 0° şi 360°. Această mulțime este un grup deoarece compunerea a două rotații e o rotație – cu suma unghiurilor corespunzătoare. Ea este o varietate de dimensiune unu deoarece unghiurile sunt în corespondență biunivocă cu punctele unui cerc, iar micile arcuri de cerc nu sunt decât segmente de dreaptă uşor curbate, dreapta fiind un spațiu euclidian de dimensiune unu. În fine, legea de compunere este continuă deoarece schimbări mici ale unghiurilor care sunt adunate produc schimbări mici ale sumei lor.

Un exemplu ceva mai complicat este grupul tuturor rotațiilor spațiului tridimensional care lasă neschimbat un punct ales drept origine. Fiecare rotație e determinată de o axă – o dreaptă care trece prin origine şi are o direcție arbitrară – şi de un unghi de rotație în jurul acestei axe. E nevoie de două variabile pentru a determina o axă (de pildă, latitudinea şi longitudinea punctului în care ea intersectează o sferă de referință cu centrul în origine) şi de o a treia pentru a determina unghiul de rotație; aşadar, acest grup are dimensiunea trei. Spre deosebire de grupul rotațiilor unui cerc, el este necomutativ – rezultatul compunerii a două transformări depinde de ordinea în care e efectuată.

În 1873, după un ocol prin ecuațiile cu derivate parțiale, Lie s-a întors la grupurile de transformări, cercetând proprietățile transformărilor infinitezimale.

El a arătat că transformările infinitezimale derivând dintr-un grup continuu nu sunt închise față de compunere, dar sunt închise față de o nouă operație, cunoscută ca *paranteza*, notată $[x, y]$. În notația matricială, aceasta este comutatorul $xy - yx$ al lui x și y. Structura algebrică rezultată e numită azi *algebră Lie*. Până spre 1930 nu se foloseau termenii de grup Lie și algebră Lie, ci cei de grup continuu și grup infinitezimal.

Există legături profunde între structura unui grup Lie și cea a algebrei sale Lie, pe care Lie le-a expus în cele trei volume ale lucrării sale *Theorie der Transformationsgruppen* (*Teoria grupurilor de transformări*) scrisă împreună cu Friedrich Engel. Ele prezentau în detaliu patru familii clasice de grupuri, două dintre care sunt grupurile rotațiilor din spațiul n-dimensional pentru n par sau impar. Cele două cazuri sunt destul de diferite, motiv pentru care sunt tratate separat. De pildă, în dimensiuni impare, o rotație posedă întotdeauna o axă fixă, ceea ce nu se întâmplă în dimensiuni pare.

Killing

Următorul progres cu adevărat important a fost făcut de Wilhelm Killing. În 1888 Killing a pus bazele unei teorii a structurii algebrelor Lie, și în particular a clasificat toate *algebrele Lie simple*, cărămizile din care sunt alcătuite toate celelalte algebre Lie. Killing a pornit de la structura cunoscută a celor mai simple algebre Lie, algebrelele Lie *speciale liniare* sl (n), pentru $n \geq 2$. Începem cu toate matricele $n \times n$ cu elemente complexe și definim paranteza Lie a două matrice A și B ca fiind $AB - BA$. Această algebră Lie nu e simplă, dar subalgebra sl (n) a tuturor matricelor ale căror elemente diagonale au suma zero e simplă. Ea are dimensiunea $n^2 - 1$.

Consecințele cercetărilor lui Killing sunt remarcabile.

Killing cunoștea structura acestei algebre și a arătat că orice algebră Lie simplă are un tip similar de structură. E remarcabil că a putut demonstra ceva atât de particular, plecând doar de la ipoteza că algebra Lie e simplă. Metoda lui a fost de a asocia fiecărei algebre Lie simple o structură geometrică numită *sistem de rădăcini*. El a folosit metodele algebrei liniare pentru a studia și clasifica sistemele de rădăcini, și a dedus apoi structura algebrei Lie corespunzătoare din cea a sistemului de rădăcini. În acest fel, a clasifica geometriile posibile ale sistemelor de rădăcini e același lucru cu a clasifica algebrele Lie simple.

Consecințele cercetărilor lui Killing sunt remarcabile. El a demonstrat că algebrele Lie simple se împart în patru familii infinite, numite azi A_n, B_n, C_n și D_n.

Pe lângă ele, mai existau cinci excepții: G_2, F_4, E_6, E_7 și E_8. Killing credea de fapt că ar fi șase excepții, dar două dintre ele s-au dovedit a fi aceeași algebră, înveșmântată diferit. Dimensiunile algebrelor Lie excepționale sunt 12, 56, 78, 133 și 248. Ele rămân un pic misterioase, deși acum înțelegem destul de bine de ce există.

Grupurile Lie simple

Datorită strânsei legături dintre un grup Lie și algebra sa Lie, clasificarea algebrelor Lie simple a condus și la o clasificare a grupurilor Lie simple. În particular, cele patru familii A_n, B_n, C_n și D_n sunt algebrele Lie ale celor patru familii clasice de grupuri de transformări. Acestea sunt grupul tuturor transformărilor liniare din spațiul $(n+1)$-dimensional, grupul rotațiilor din spațiul $(2n+1)$-dimensional, grupul simplectic în $2n$ dimensiuni, care e important în mecanica clasică și cuantică, precum și în optică, și grupul rotațiilor din spațiul $2n$-dimensional. Câteva elemente au fost adăugate ulterior; între ele, o abordare grafică a analizei combinatorii a sistemelor de rădăcini, cunoscută în prezent ca *diagramele Coxeter* sau *Dynkin* introduse de către Harold Scott MacDonald Coxeter și Eugene (Evghenii) Dynkin.

Grupurile Lie sunt importante în matematica modernă din mai multe motive. De exemplu, în mecanică, numeroase sisteme prezintă simetrii, iar aceste simetrii fac posibilă găsirea soluțiilor la ecuațiile dinamice. Simetriile formează în general un grup Lie. În fizica matematică, studiul particulelor elementare se bazează mult pe aparatul grupurilor Lie, din nou datorită anumitor principii de simetrie. Grupul excepțional al lui Killing E_8 joacă un rol important în teoria supercorzilor, o încercare actuală de a unifica mecanica cuanticei și relativitatea generală. Marea descoperire din 1983 a lui Simon Donaldson că spațiul euclidian cvadridimensional posedă structuri diferențiabile nestandard se bazează esențialmente pe o proprietate neobișnuită a grupului Lie al rotațiilor în spațiul cvadridimensional. Teoria grupurilor Lie e vitală pentru întreaga matematică modernă.

Grupurile abstracte

În programul de la Erlangen al lui Klein esențial este ca grupurile care apar să constea din transformări – adică elementele grupului să acționeze asupra unui anumit spațiu. Mare parte din primele rezultate privind grupurile presupuneau această structură. Cercetările ulterioare au făcut însă un pas mai departe spre

abstractizare: a fost reținută proprietatea de grup, dar a fost abandonat spațiul. Un grup consta din entități matematice care puteau fi combinate pentru a produce entități similare, dar acele entități nu trebuiau neapărat să fie transformări.

Un exemplu sunt numerele. Două numere (întregi, raționale, reale, complexe) pot fi adunate, iar rezultatul e un număr de același tip. Numerele formează un grup în raport cu operația de adunare. Dar numerele nu sunt transformări. Așa încât, deși grupurile de transformări serviseră pentru a unifica geometria, ipoteza unui spațiu de bază a trebuit abandonată pentru a unifica teoria grupurilor.

Unul dintre primii care s-au apropiat de luarea acestei decizii a fost Arthur Cayley, în trei lucrări din 1849 și 1854. Aici Cayley afirma că un grup conține o serie de *operatori* 1, a, b, c și așa mai departe. Compunerea ab a oricăror doi operatori trebuie să fie un alt operator; operatorul particular 1 satisface condiția $1a = a$ și $a1 = a$ pentru orice operator a; în fine, trebuie să fie valabilă legea asociativității $(ab)c = a(bc)$. Operatorii lui continuau însă să acționeze asupra a ceva (o mulțime de variabile). În plus, el omisese o proprietate crucială: orice a trebuie să aibă un invers a', astfel încât $a'a = a\,a' = 1$. Așadar, Cayley s-a apropiat, dar a ratat de puțin premiul.

În 1858 Richard Dedekind le-a permis elementelor grupului să fie entități arbitrare, nu neapărat transformări sau operatori, dar a inclus în definiția sa legea comutativității $ab = ba$. Ideea lui era adaptată scopului pe care și l-a propus, teoria numerelor, dar excludea cele mai multe grupuri interesante din teoria lui Galois, ca să nu mai vorbim de universul mai larg al matematicii. Conceptul modern de grup abstract a fost introdus de Walther van Dyck în 1882–1883. El a inclus existența unui invers, dar a respins nevoia legii comutative. Tratarea pe deplin axiomatică a grupurilor a apărut curând, prin Edward Huntington și Eliakim Moore în 1902 și Leonard Dickson în 1905.

Odată ce structura abstractă a grupurilor a fost separată de orice interpretare particulară, domeniul s-a dezvoltat rapid. Cercetările inițiale erau în genere un fel de „colecționare de fluturi" – oamenii studiau exemple individuale de grupuri sau tipuri aparte, căutând tipare comune. Principalele concepte și tehnici au apărut relativ repede, iar domeniul a prosperat.

Teoria numerelor

O altă sursă importantă de noi concepte algebrice a fost teoria numerelor. Gauss a inițiat procesul atunci când a introdus ceea ce numim acum *întregii lui Gauss*. Aceștia sunt numere complexe $a + bi$, unde a și b sunt întregi. Sumele și produsele de astfel de numere au aceeași formă. Gauss a descoperit că noțiunea

Gauss a inițiat procesul atunci când a introdus ceea ce numim acum *întregii lui Gauss.*

de număr prim se generalizează și ea la întregii lui Gauss. Un întreg al lui Gauss este prim dacă el nu poate fi exprimat într-un mod nebanal ca produsul a doi întregi ai lui Gauss. Descompunerea în factori primi e unică pentru întregii lui Gauss. Unele numere prime obișnuite, cum ar fi 3 și 7, rămân prime când sunt considerate ca întregi ai lui Gauss, dar altele nu: de exemplu $5 = (2 + i)(2 - i)$. Acest fapt e strâns legat de Teorema lui Fermat despre numerele prime și sumele a două pătrate, iar întregii lui Gauss lămuresc această teoremă și cele înrudite.

Dacă împărțim un întreg al lui Gauss la un altul, rezultatul poate să nu fie un întreg al lui Gauss, dar se apropie de această clasă: este de forma $a + bi$, unde a și b sunt numere raționale. Acestea sunt *numerele lui Gauss.* Mai general, teoreticienii numerelor au descoperit că se întâmplă ceva analog dacă luăm orice polinom $p(x)$ cu coeficienți întregi și considerăm apoi toate combinațiile liniare $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ ale soluțiilor sale $x_1 \ldots x_n$. Considerând $a_1 \ldots a_n$ raționali, obținem un sistem de numere complexe care e *închis* față de adunare, scădere, înmulțire și împărțire – ceea ce înseamnă că atunci când aceste operații sunt aplicate unui asemenea număr, rezultatul e un număr de același tip. Acest sistem formează un *corp de numere algebrice.* Dacă în schimb cerem ca $a_1 \ldots a_n$ să fie întregi, sistemul e închis față de adunare, scădere și înmulțire, dar nu și față de împărțire: este un *inel de numere algebrice.*

Cea mai ambițioasă aplicație a acestor noi sisteme de numere a fost Marea Teoremă a lui Fermat: afirmația că ecuația lui Fermat $x^n + y^n = z^n$ nu are soluții în numere întregi când puterea este mai mare sau egală cu trei. Nimeni n-a putut reconstitui demonstrația despre care Fermat spunea că e „remarcabilă", și devenea tot mai limpede că nu avusese niciodată o asemenea demonstrație. S-au făcut totuși unele progrese. Fermat găsise demonstrații pentru puteri de ordinul trei și patru, Pierre Lejeune Dirichlet a tratat puterea a cincea în 1828, iar Henri Lebesgue a găsit o demonstrație pentru puterea a șaptea în 1840.

În 1847 Gabriel Lamé a pretins că ar fi găsit o demonstrație pentru toate puterile, dar Ernst Eduard Kummer i-a descoperit o greșeală. Lamé presupusese fără demonstrație că unicitatea descompunerii în factori primi e valabilă pentru numerele algebrice, ceea ce e fals pentru unele (de fapt, cele mai multe) corpuri de numere algebrice. Kummer a arătat că unicitatea nu e valabilă pentru corpul de numere algebrice care apare în studiul Marii Teoreme a lui Fermat pentru puterea a 23-a. Dar Kummer nu s-a lăsat bătut, și a găsit o cale de a ocoli acest obstacol, inventând un nou instrument matematic – teoria numerelor ideale.

Pe la 1847 el demonstrase Marea Teoremă a lui Fermat pentru toate puterile până la 100, cu excepția lui 37, 59 și 67. Elaborând un alt instrument, Kummer și Dimitri Mirimanoff au demonstrat și aceste cazuri în 1857. Pe la 1980, prin metode similare se demonstraseră toate cazurile până la puterea 150 000, dar metoda începea să-și piardă suflul.

Inele, corpuri și algebre

Conceptul de număr ideal al lui Kummer era greoi, iar Dedekind l-a reformulat în termeni de ideale, subsisteme speciale ale întregilor algebrici. Ajuns pe mâinile școlii lui Hilbert de la Göttingen, în special pe ale lui Emmy Noether, întregul domeniu a fost așezat pe o bază axiomatică. În afară de grupuri, alte trei tipuri de sisteme algebrice au fost definite prin liste convenabile de axiome: inele, corpuri și algebre.

Într-un inel, operațiile de adunare, scădere și înmulțire sunt definite și satisfac toate legile obișnuite ale algebrei, cu excepția comutativității înmulțirii. Dacă și această lege e valabilă, avem un *inel comutativ*.

În 1847 Gabriel Lamé a pretins că ar fi găsit o demonstrație pentru toate puterile, dar Ernst Eduard Kummer i-a descoperit o greșeală.

Într-un *corp*, operațiile de adunare, scădere, înmulțire și împărțire sunt definite și satisfac toate legile obișnuite ale algebrei, inclusiv comutativitatea înmulțirii. Dacă această lege nu e valabilă, avem un *inel cu diviziune*.

O *algebră* e ca un inel, dar elementele ei pot fi de asemenea înmulțite cu diverse constante, numere reale, complexe sau – în situația cea mai generală – cu elemente ale unui corp. Legile adunării sunt cele obișnuite, dar înmulțirea poate satisface diferite axiome. Dacă e asociativă, avem o algebră asociativă. Dacă satisface anumite proprietăți legate de comutatorul $xy - yx$, este o algebră Lie.

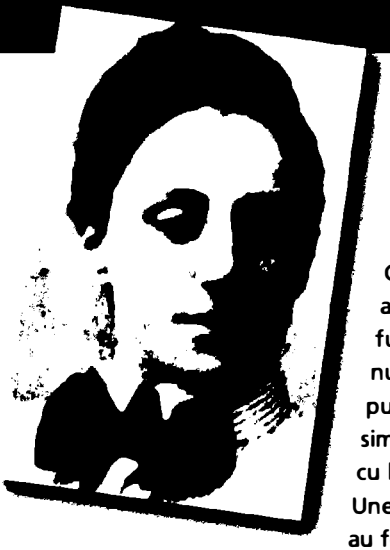
Există zeci, poate sute de tipuri diferite de structuri algebrice, fiecare cu lista ei de axiome. Unele au fost inventate doar pentru a explora consecințele unor axiome interesante, dar cele mai multe au apărut deoarece erau necesare într-o anumită problemă.

Grupuri simple finite

Punctul cel mai înalt al cercetărilor din secolul XX asupra grupurilor finite a fost clasificarea tuturor grupurilor simple finite, obținându-se astfel pentru grupuri finite ceea ce obținuse Killing pentru grupuri și algebre Lie. S-a ajuns

Emmy Amalie Noether

1882–1935



Emmy Noether a fost fiica matematicianului Max Noether şi a Idei Kaufmann, ambii de origine evreiască. În 1900 obţinuse dreptul să predea limbi străine, dar a hotărât că viitorul ei e matematica. Pe atunci, universităţile germane permiteau femeilor să urmeze neoficial cursurile cu acordul profesorului, ceea ce a făcut şi ea între 1900 şi 1902. S-a dus apoi la Göttingen, unde, în 1903 şi 1904, i-a avut ca profesori pe Hilbert, Klein şi Minkowski.

A obţinut un doctorat în 1907 cu specialistul în teoria invarianţilor Paul Gordan. În teza ei, a calculat un foarte complicat sistem de invarianţi. Pentru un bărbat, următorul pas ar fi fost titularizarea, dar ea nu era permisă femeilor. A rămas acasă la Erlangen, ajutându-şi tatăl handicapat, dar şi-a continuat cercetările, iar reputaţia ei a crescut rapid.

În 1915 a fost rechemată la Göttingen de Klein şi Hilbert, care se luptau să schimbe regulile pentru ca ea să poată ocupa un post universitar. Au reuşit până la urmă în 1919. Curând după sosirea sa, a demonstrat o teoremă fundamentală, adesea numită Teorema Noether, punând în legătură simetriile unui sistem fizic cu legile de conservare. Unele dintre rezultatele ei au fost folosite de Einstein pentru a formula anumite părţi din relativitatea generală. În 1921 a scris un articol de teoria inelelor şi idealelor, adoptând o abordare abstract-axiomatică. Rezultatele ei au format o parte importantă din tratatul clasic al lui Bartel Leendert van der Waerden *Moderne Algebra*.

Când naziştii au venit la putere în Germania, fiind evreică, a fost concediată şi a emigrat în SUA. Van der Waerden spunea că pentru ea „relaţiile dintre numere, funcţii şi operaţii deveneau limpezi, susceptibile de generalizări şi productive abia după ce fuseseră... reduse la relaţii conceptuale generale".

la o descriere completă a tuturor cărămizilor posibile pentru alcătuirea grupurilor finite – grupurile simple. Dacă grupurile sunt molecule, grupurile finite sunt atomii lor.

Clasificare dată de Killing grupurilor Lie simple dovedise că acestea trebuiau să aparţină uneia dintre cele patru familii infinite A_n, B_n, C_n şi D_n, cu exact cinci excepţii G_2, F_4, E_6, E_7 şi E_8. Clasificarea tuturor grupurilor finite simple a fost

realizată de prea mulți matematicieni pentru a-i menționa individual, dar programul general de rezolvare a acestei probleme i s-a datorat lui Daniel Gorenstein. Răspunsul, publicat în 1988–1990, e straniu de similar: o listă de familii infinite şi o listă de excepții. De data aceasta există mult mai multe familii, iar excepțiile sunt în număr de 26.

Familiile cuprind grupurile alterne (cunoscute lui Galois) şi o mulțime de grupuri de genul grupurilor Lie, dar definite pe diverse corpuri finite, în locul corpului numerelor complexe. Există de asemenea stranii variațiuni pe această temă. Excepțiile sunt 26 de grupuri individuale, care par să aibă tipare comune, dar fără o structură unitară. Prima demonstrație că această clasificare e completă a fost rezultatul muncii a sute de matematicieni şi se întinde pe circa 10 000 de pagini. În plus, anumite părți cruciale ale demonstrației n-au fost publicate. Cercetările recente ale celor care lucrează în domeniu s-au îndreptat spre simplificarea clasificării, lucru posibil odată ce se cunoştea răspunsul. Rezultatele apar ca o serie de tratate, însumând aproximativ 2000 de pagini.

Cel mai misterios dintre grupurile simple excepționale, şi cel mai mare, este *monstrul*. Ordinul lui este

$$2^{46} \times 3^{20} \times 5^{9} \times 7^{6} \times 11^{2} \times 13^{3} \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71$$

Ceea ce înseamnă

808017424794512875886459904961710757005754368000000000

şi e aproximativ 8×10^{53}. Bernd Fischer şi Robert Griess au făcut în 1973 ipoteze cu privire la el. În 1980 Griess a demonstrat că el există, şi i-a dat o construcție algebrică: grupul simetriilor unei algebre 196 844-dimensionale. Monstrul pare să aibă legături neaşteptate cu teoria numerelor şi analiza complexă, enunțate de John Conway drept conjectura Monstruoasei Lumini a Lunii. Această conjectură a fost demonstrată în 1992 de Richard Borcherds, pentru care a primit Medalia Fields – cel mai important premiu în matematică.

Marea Teoremă a lui Fermat

Aplicarea corpurilor de numere algebrice la teoria numerelor s-a dezvoltat rapid în a doua jumătate a secolului XX, atingând multe alte domenii ale matematicii, între care teoria lui Galois şi topologia algebrică. Apogeul acestor cercetări a fost demonstrarea Marii Teoreme a lui Fermat, la aproximativ 350 de ani după ce a fost enunțată.

Andrew Wiles

n. 1953

Andrew Wiles s-a născut în 1953 la Cambridge. Pe când avea zece ani a citit despre Marea Teoremă a lui Fermat şi s-a hotărât să devină matematician şi s-o demonstreze. Când şi-a dat doctoratul abandonase în bună măsură această idee, deoarece teorema părea prea inabordabilă, aşa încât a lucrat în teoria numerelor asupra „curbelor eliptice", domeniu aparent diferit. S-a mutat în SUA şi a devenit profesor la Princeton.

În anii '80 devenise clar că putea exista o legătură neaşteptată între Marea Teoremă a lui Fermat şi anumite probleme profunde şi dificile legate de curbele eliptice. Gerhard Frey a explicitat această legătură folosind aşa-numita Conjectură Taniyama–Shimura. Când a aflat de ideea lui Frey, Wiles a încetat orice alte cercetări pentru a se concentra asupra Marii Teoreme a lui Fermat, iar după şapte ani de lucru solitar s-a convins că găsise o demonstraţie bazată pe un caz particular al Conjecturii Taniyama–Shimura. S-a dovedit că această demonstraţie avea o lacună, dar Wiles şi Richard Taylor au înlăturat acest neajuns, iar o demonstraţie completă a fost publicată în 1995.

Alţi matematicieni au extins imediat ideile lui pentru a demonstra întreaga Conjectură Tanyiama–Shimura, dezvoltând mai departe noile idei. Pentru demonstraţia sa, Wiles a primit numeroase onoruri, între care Premiul Wolf. În 1998, fiind prea bătrân pentru o Medalie Fields, care în mod tradiţional e acordată persoanelor sub 40 de ani, a primit o decoraţie specială de argint din partea Uniunii Matematice Internaţionale. În 2000 a fost făcut Cavaler al Ordinului Imperiului Britanic.

Ideea cu adevărat decisivă a venit dintr-un frumos domeniu aflat în miezul cercetărilor moderne asupra ecuaţiilor diofantice: teoria curbelor eliptice. Acestea sunt ecuaţii în care un pătrat perfect este egal cu un polinom cubic, iar ele reprezintă unul dintre domeniile ecuaţiilor diofantice pe care matematicienii le înţeleg destul de bine. Totuşi, rămân mari probleme nerezolvate, între care mai cu seamă conjectura Taniyama–Weil, numită după Yutaka Taniyama şi André Weil. Ea spune că orice curbă eliptică poate fi reprezentată prin funcţii modulare – generalizări ale funcţiilor trigonometrice studiate între alţii de Klein.

Andrew Wiles visase pe când era copil să demonstreze Marea Teoremă a lui Fermat.

La începutul anilor '80, Gerhard Frey a găsit o legătură între Marea Teoremă a lui Fermat şi curbele eliptice. Să presupunem că există o soluţie a ecuaţiei lui Fermat; atunci putem construi o curbă eliptică având proprietăţi neobişnuite – atât de neobişnuite, încât existenţa curbei pare extrem de improbabilă. În 1986 Kenneth Ribet a dat rigoare acestei idei, arătând că dacă e adevărată conjectura Taniyama–Weil, atunci curba lui Frey nu poate exista. Aşadar, nu poate exista nici presupusa soluţie a ecuaţiei lui Fermat, ceea ce ar demonstra Marea Teoremă a lui Fermat. Această abordare depindea de conjectura Taniyama–Weil, dar ea arăta că Marea Teoremă a lui Fermat nu e doar o curiozitate istorică izolată, ci se află în centrul teoriei moderne a numerelor.

Andrew Wiles visase pe când era copil să demonstreze Marea Teoremă a lui Fermat, dar când a devenit matematician a hotărât că nu era decât o problemă izolată – nerezolvată, dar nu cu adevărat importantă. Rezultatul lui Ribet l-a făcut

La ce i-a ajutat algebra abstractă

În cartea sa din 1854 *Legile gândirii*, George Boole a arătat că algebra poate fi aplicată în logică, inventând ceea ce numim azi algebra booleană.

Nu putem prezenta aici decât foarte pe scurt ideile lui Boole. Cei mai importanţi operatori logici sunt *non*, *şi* şi *sau*. Dacă o propoziţie P e adevărată, atunci non-P e falsă, şi viceversa. Propoziţia P şi Q e adevărată dacă şi numai dacă atât P, cât şi Q sunt adevărate. P sau Q e adevărată dacă cel puţin una din ele e adevărată – eventual ambele sunt adevărate. Boole a observat că dacă rescriem P ca 1 şi Q ca 0, atunci algebra acestor operatori logici e foarte asemănătoare cu algebra obişnuită, cu condiţia să-i considerăm pe 1 şi 0 întregi modulo 2, aşa încât 1 + 1 = 0, iar –1 e acelaşi lucru cu 1. Astfel, non-P este 1 + P, P şi Q este PQ, iar P sau Q este P + Q + PQ. Suma P + Q corespunde lui *sau exclusiv* (care în informatică e notat *xor*). P *xor* Q este adevărată atunci când P este adevărată sau Q este adevărată, dar nu ambele. Boole a descoperit că bizara lui algebră a logicii e necontradictorie dacă îi reţineţi regulile uşor stranii şi le folosiţi sistematic. Acesta a fost unul dintre primii paşi spre o teorie formalizată a logicii matematice.

să se răzgândească. În 1993 a anunțat o demonstrație a conjecturii Taniyama–Weil pentru o clasă particulară de curbe eliptice, suficient de generală ca să demonstreze Marea Teoremă a lui Fermat. Dar când lucrarea a fost înaintată spre publicare, i s-a descoperit o lacună serioasă. Wiles aproape că renunțase când „brusc, în mod cu totul neașteptat, am avut această incredibilă revelație... Era atât de de frumoasă, atât de simplă și de elegantă, iar eu o contemplam fără să-mi vină să cred". Cu ajutorul lui Richard Taylor, a revăzut demonstrația și a umplut lacuna. Lucrarea a fost publicată în 1995.

Nu doar algebra a devenit abstractă.

Putem fi siguri că oricare vor fi fost ideile pe care le avea în minte Fermat atunci când a susținut că ar avea o demonstrație a teoremei, ele trebuie să fi fost foarte diferite de metodele folosite de Wiles. A avut oare Fermat o demonstrație simplă și ingenioasă, sau pur și simplu s-a păcălit? Aceasta e o enigmă care, spre deosebire de Marea Teoremă a lui Fermat, s-ar putea să nu fie dezlegată niciodată.

Matematica abstractă

Tendința spre o perspectivă mai abstractă asupra matematicii a fost consecința naturală a diversității crescânde a temelor abordate. Pe vremea când matematica se ocupa mai ales de numere, simbolurile algebrei nu făceau decât să țină locul unor numere. Dar pe măsură ce matematica s-a dezvoltat, simbolurile însele au început să-și aibă propria lor viață. Semnificația simbolurilor a devenit mai puțin importantă decât regulile după care se putea opera cu ele. Nici măcar regulile nu erau intangibile: legile tradiționale ale aritmeticii, cum ar fi comutativitatea, nu erau întotdeauna adecvate noilor concepte.

Nu doar algebra a devenit abstractă. Din motive asemănătoare, analiza și geometria s-au concentrat și ele pe chestiuni mai generale. Principala schimbare de perspectivă s-a produs între mijlocul secolului XIX și mijlocul secolului XX. Apoi a început o perioadă de consolidare, în care matematicienii au încercat să mențină echilibrul între două necesități contradictorii – cea a formalismului abstract și cea a aplicațiilor în științe. Abstracția și generalitatea merg mână-n mână, dar abstracția poate și să ascundă semnificația matematicii. Problema nu mai e însă dacă abstracția e utilă sau necesară: metodele abstracte și-au dovedit valoarea prin faptul că au făcut posibilă rezolvarea unor probleme enunțate demult, cum ar fi Marea Teoremă a lui Fermat. Iar ceea ce ieri părea doar un joc formal se poate transforma mâine într-un instrument vital pentru știință sau pentru comerț.

La ce ne ajută algebra abstractă

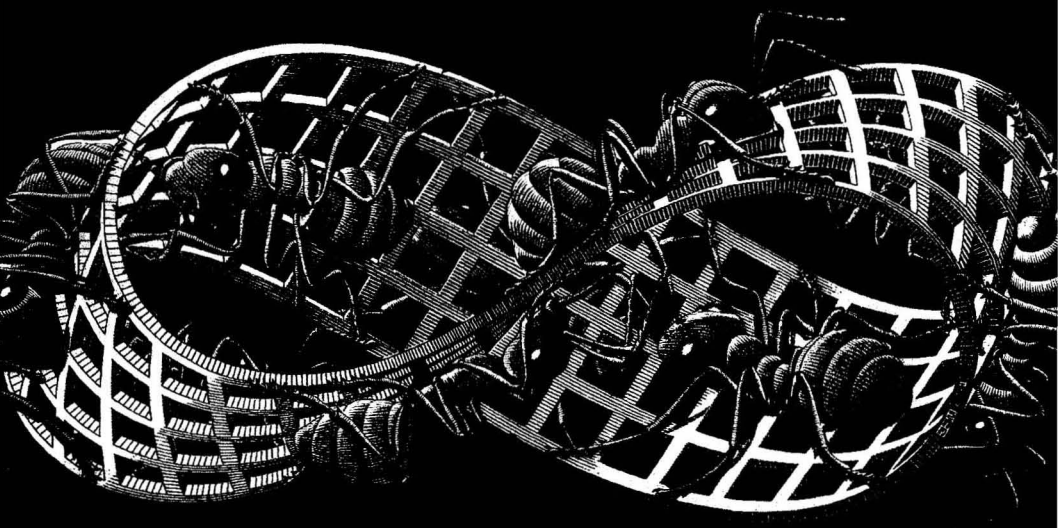
Corpurile Galois formează baza unui sistem de codificare larg folosit într-o mulțime de aplicații comerciale, în special la CD-uri și DVD-uri. Ori de câte ori ascultați muzică sau vă uitați la video, folosiți algebra abstractă.

Aceste metode sunt cunoscute sub numele de *coduri Reed–Solomon*, după Irving Reed și Gustave Solomon, care le-au introdus în 1960. Ele sunt coduri de corectare a erorilor, bazate pe un polinom cu coeficienți într-un corp finit, construit pornind de la datele care trebuie codificate, cum ar fi muzică sau semnale video. Se știe că un polinom de grad n este unic determinat de valorile sale în n puncte distincte. Ideea este de a calcula polinomul în mai mult de n puncte. Dacă nu există erori, orice submulțime de n date va reconstrui același polinom. În caz contrar, dacă numărul erorilor nu e prea mare, încă e posibil să deducem polinomul.

În practică datele sunt reprezentate ca blocuri codificate, cu $2^m - 1$ simboluri de m biți pe bloc, un bit fiind o cifră binară, 0 sau 1. O alegere foarte răspândită este $m = 8$, deoarece multe dintre calculatoarele mai vechi lucrează în byți – șiruri de opt biți. Aici numărul simbolurilor unui bloc este 255. Un cod Reed–Solomon uzual pune 223 byți de date codificate în fiecare bloc de 255 byți, folosind cei 32 de byți rămași drept simboluri de paritate, care arată dacă anumite combinații de cifre ale datelor trebuie să fie pare sau impare. Acest cod poate corecta până la 16 erori pentru fiecare bloc.

15

Calitatea bate cantitatea



Principalele ingrediente ale geometriei lui Euclid – dreptele, unghiurile, cercurile, pătratele etc. – sunt toate legate de *măsurători.* Segmentele de dreaptă au lungimi, unghiurile au o mărime definită, 90° diferind esențial de 91° sau de 89°, cercurile sunt definite prin razele lor, pătratele au laturi de o lungime dată. Ingredientul ascuns care face să funcționeze întreaga geometrie a lui Euclid este lungimea, o cantitate *metrică*, una care nu e schimbată de mişcări rigide şi care defineşte conceptul lui Euclid echivalent cu mişcarea – congruența.

Topologia

Când matematicienii s-au întâlnit pentru prima oară cu alte tipuri de geometrie, acestea erau şi ele metrice. În geometria neeuclidiană, lungimile şi unghiurile sunt definite, dar au doar proprietăți diferite de cele ale lungimilor şi unghiurilor din planul euclidian. Apariția geometriei proiective a produs o revoluție: transformările proiective pot schimba lungimile şi unghiurile. Geometria euclidiană şi cele două tipuri principale de geometrie neeuclidiană sunt rigide. Geometria proiectivă e mai flexibilă, dar chiar şi aici există invarianți mai subtili, iar din perspectiva lui Klein ceea ce defineşte o geometrie e un grup de transformări şi invarianții corespunzători.

Pe la sfârşitul secolului XIX, matematicienii au început să elaboreze un gen de geometrie încă şi mai flexibilă, atât de flexibilă încât e adesea cunoscută drept geometria benzilor de cauciuc. Mai precis numită *topologie*, aceasta e geometria formelor care pot fi deformate sau distorsionate în moduri extrem de complicate. Dreptele se pot încovoia, comprima sau dilata; cercurile pot fi turtite pentru a deveni triunghiuri sau pătrate. Tot ce contează aici e continuitatea. Transformărilor permise în topologie li se cere să fie continue în sensul analizei; simplu spus, asta înseamnă că dacă, înainte de transformare, două puncte sunt suficient de apropiate, după ea vor fi de asemenea apropiate – de unde imaginea benzii de cauciuc.

Persistă aici o urmă de gândire metrică: „apropiate" e un concept metric. Dar pe la începutul secolului XX această urmă a fost înlăturată, iar transformările topologice au început să trăiască pe cont propriu. Importanța topologiei a crescut rapid, iar ea a ocupat centrul scenei matematicii – chiar dacă la început părea bizară şi practic fără conținut. Cu transformări *atât* de flexibile, ce mai

putea fi invariant? Răspunsul, după cum s-a dovedit, este „destul de multe". Dar tipul de invariant care a apărut nu semăna cu nimic cunoscut până atunci în geometrie. Conexiunea – din câte bucăți e alcătuit acest obiect? Găurile – este el un singur bloc, sau e străbătut de tuneluri? Nodurile – cum este el încâlcit și dacă poate fi descâlcit? Pentru un topolog, o gogoașă și o ceașcă de cafea sunt identice (dar nu și cu un pahar), iar ambele diferă de o minge rotundă. Un nod simplu diferă de un nod în formă de opt, dar demonstrarea acestui fapt pretindea un tip cu totul nou de mașinărie, iar multă vreme nimeni n-a putut demonstra nici măcar faptul că nodurile există.

Pare remarcabil faptul că ceva atât de difuz și de straniu a putut avea vreo importanță. Dar aparențele sunt înșelătoare. Continuitatea e unul dintre aspectele fundamentale ale lumii naturale, și orice studiu aprofundat al continuității conduce la topologie. Chiar și astăzi, folosim topologia de cele mai multe ori indirect, ca pe o tehnică între multe altele. În bucătărie nu veți găsi nimic topologic – nimic evident, în tot cazul. (S-ar putea totuși să găsiți un spălător haotic de vase, care utilizează dinamica stranie a două brațe rotitoare pentru a spăla farfuriile mai eficient, iar felul în care înțelegem haosul se bazează pe topologie.) Principalii consumatori de topologie sunt cei care se ocupă de teoria cuantică a câmpului – un domeniu important al fizicii. O altă aplicație a ideilor topologice apare în biologia moleculară, unde descrierea și analiza răsucirilor și deformărilor moleculei de ADN necesită concepte topologice.

În culise, topologia se află în nucleul matematicii și face posibilă dezvoltarea altor tehnici cu utilizări practice evidente. Ea este un studiu riguros al proprietăților geometrice *calitative*, opusul celor cantitative, cum ar fi lungimile. Acesta e motivul pentru care matematicienii consideră topologia de enormă importanță, cu toate că restul lumii abia a auzit de ea.

Poliedrele și podurile din Königsberg

Deși topologia n-a luat ființă decât pe la 1900, ea și-a făcut uneori apariția și în matematica mai veche. Două elemente de preistorie a topologiei au fost introduse de Euler: formula lui pentru poliedre și rezolvarea dată de el problemei podurilor din Königsberg.

În 1639 Descartes observase o trăsătură stranie a numerologiei poliedrelor regulate. Să considerăm de exemplu un cub. El are 6 fețe, 12 muchii și 8 vârfuri. Adunați 6 cu 8 și veți obține 14, care e cu 2 mai mare decât 12. Cum stau lucrurile cu un dodecaedru? Acum există 12 fețe, 30 de muchii și 20 de vârfuri. Iar 12 + 20 = 32, cu 2 mai mare decât 30. Același lucru se întâmplă cu tetraedrul,

octaedrul şi icosaedrul. De fapt, aceeaşi relaţie părea să funcţioneze pentru aproape orice poliedru. Dacă un poliedru are F feţe, M muchii şi V vârfuri, atunci $F + V = M + 2$, relaţie care poate fi rescrisă

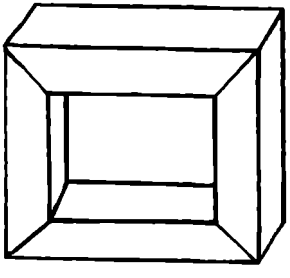
$$F + V - M = 2$$

Descartes nu şi-a publicat descoperirea, dar şi-a notat-o, iar Leibniz a citit manuscrisul lui în 1675.

Euler a fost primul care a publicat această relaţie, în 1750. După care a publicat şi o demonstraţie în 1751. Relaţia îl interesa deoarece încercase să clasifice poliedrele. Orice fenomen general de acest tip trebuia luat în considerare pentru a obţine o asemenea clasificare.

Este oare valabilă formula pentru *toate* poliedrele? Nu tocmai. Un poliedru având forma unei rame de tablou, cu secţiuni transversale pătrate şi colţuri tăiate oblic are 16 feţe, 32 de muchii şi 16 vârfuri, aşa încât $F + V - M = 0$. Motivul acestei discrepanţe se dovedeşte a fi prezenţa unei găuri. Dacă un poliedru are g găuri, atunci

$$F + V - M = 2 - 2g$$



Poliedru cu o gaură

Ce este de fapt o gaură? Întrebarea e mai grea decât pare. În primul rând, vorbim despre suprafaţa poliedrului, nu despre interiorul lui. În viaţa reală, facem o gaură în ceva atunci când îi sfredelim interiorul, dar formulele de mai sus nu se referă la interiorul unui poliedru, ci doar la feţele care-i alcătuiesc suprafaţa, împreună cu muchile şi vârfurile lor. Tot ce avem în vedere se află pe suprafaţă. În al doilea rând, singurele găuri care schimbă rezultatele numerice sunt cele care-şi croiesc întregul drum prin poliedru – tuneluri cu două capete, aşa-zicând, nu găuri de genul celor săpate de muncitori pe un drum. În al treilea rând, asemenea găuri nu sunt în suprafaţă, deşi sunt cumva mărginite de ea. Când cumperi un covrig, îi cumperi şi gaura, dar nu poţi să cumperi o gaură de sine stătătoare. Ea există doar datorită covrigului, chiar dacă în acest caz cumperi şi interiorul solid al covrigului.

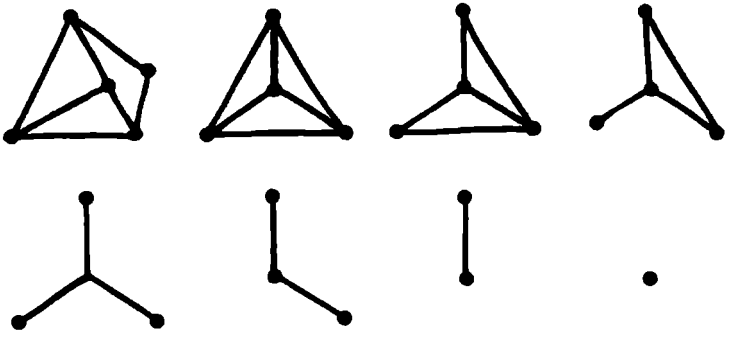
Mai uşor e să definim ce înseamnă „fără găuri". Un poliedru e fără găuri dacă poate fi deformat continuu, creând feţe şi muchii curbate, aşa încât să devină o sferă (mai precis, suprafaţa ei). Pentru acest tip de suprafaţă, $F + V - M$ este într-adevăr întotdeauna 2. Reciproca e de asemenea adevărată: dacă $F + V - M = 2$, atunci poliedrul poate fi deformat într-o sferă.

Poliedrul în formă de ramă nu pare să poată fi deformat într-o sferă – unde s-ar putea duce gaura? Pentru o demonstraţie riguroasă a acestei imposibilităţi,

DEMONSTRAȚIA LUI CAUCHY PENTRU FORMULA DESCARTES-EULER

Să scoatem una dintre fețe și să întindem suprafața poliedrului pe un plan. Aceasta îl reduce pe F cu 1, așa încât, în configurația plană, avem de demonstrat că $F + V - M = 1$. Pentru aceasta, începem prin a transforma toate fețele în triunghiuri, desenând diagonalele care nu se intersectează. Fiecare nouă diagonală îl lasă pe V neschimbat, dar îi crește pe M și pe F cu 1, așa încât $F + V - M$ rămâne ca înainte. Ștergem acum câte o muchie, începând din exterior. Fiecare asemenea ștergere reduce atât pe F, cât și pe M, așa încât $F + V - M$ este din nou neschimbat. Când s-au epuizat toate fețele, rămânem cu un arbore de muchii și vârfuri, care nu conține nici o buclă închisă. Unul câte unul, ștergem vârfurile *terminale*, împreună cu muchia care le unește. Acum M și V descresc amândouă cu 1, și din nou $F + V - M$ e neschimbat. La urmă rămânem cu un singur vârf. Acum $F = 0$, $M = 0$, deci $F + V - M = 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemplu pentru demonstrația lui Cauchy



e suficient să ținem cont de faptul că, pentru acest poliedru, $F + V - M = 0$. Această relație e imposibilă pentru suprafețe deformabile în sfere. Așadar, numerologia poliedrelor ne indică proprietăți importante ale geometriei lor, iar aceste proprietăți pot fi invarianți topologici (neschimbați la deformări).

Formula lui Euler e considerată acum un indiciu important privind legătura între aspectele combinatorii ale poliedrelor, cum ar fi numărul de fețe, și aspectele topologice. Putem raționa și invers. Pentru a deduce câte găuri are o suprafață, calculăm $F + V - M - 2$, împărțim la 2 și schimbăm semnul:

$$g = -(F + V - M)/2$$

O consecință stranie: putem calcula acum câte găuri are un poliedru, fără a defini „gaura".

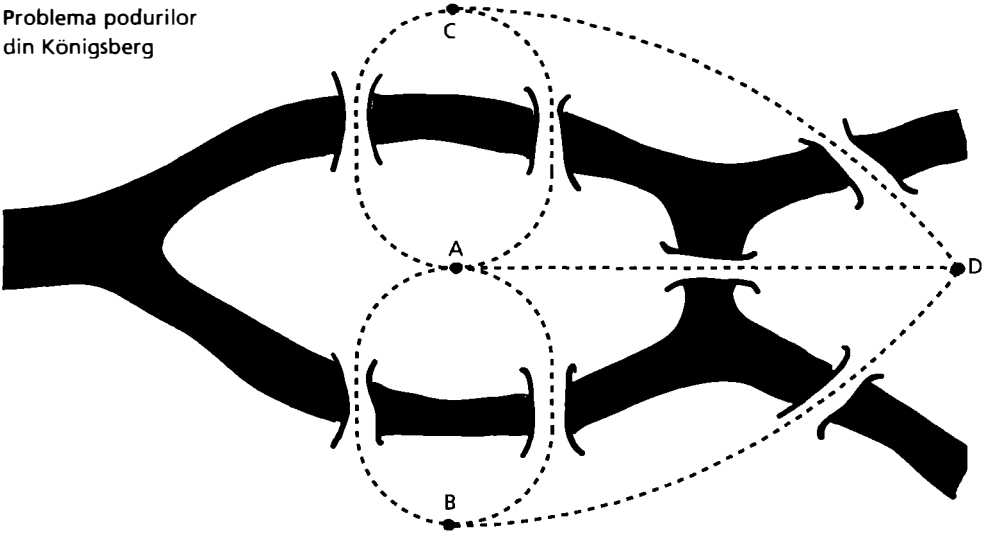
Un avantaj al acestui procedeu este că e intrinsec poliedrului. El nu implică vizualizarea poliedrului într-un spațiu înconjurător tridimensional, care e modul în care ochii noştri văd gaura. O furnică suficient de inteligentă care ar trăi pe suprafața poliedrului ar putea calcula că el are o gaură chiar dacă tot ce ar vedea ar fi suprafața. Acest punct de vedere intrinsec e natural în topologie. Ea se ocupă de formele lucrurilor luate în sine, nu ca parte a altceva.

La prima vedere, problema podurilor din Königsberg nu are nici o legătură cu combinatorica poliedrelor. Oraşul Königsberg, pe atunci în Prusia, era situat pe ambele maluri ale râului Pregelarme, care avea două insule. Insulele erau legate de maluri şi între ele prin şapte poduri. Se pare că cetățenii Königsbergului şi-au pus multă vreme întrebarea dacă era posibil să facă o plimbare în care să traverseze fiecare pod exact o dată.

În 1735 Euler a rezolvat problema, arătând că nu există soluție, şi a explicat de ce. El a adus două contribuții importante: a simplificat problema, reducând-o la esență, apoi a generalizat-o pentru a putea trata alte probleme matematice similare. El a arătat că importante nu sunt mărimea şi forma insulelor, ci modul în care sunt legate între ele insulele, malurile şi podurile. Întreaga problemă poate fi redusă la o diagramă simplă formată din puncte (vârfuri) unite prin segmente (muchii), desenate aici deasupra hărții.

Pentru a alcătui această diagramă, aşezați câte un vârf pe fiecare porțiune de uscat – malul nordic, malul sudic şi cele două insule. Uniți două vârfuri printr-o

Problema podurilor din Königsberg



muchie ori de câte ori există un pod care unește porțiunile corespunzătoare de uscat. Se obțin astfel patru vârfuri, *A, B, C, D,* și șapte muchii, câte una pentru fiecare pod. Problema este atunci echivalentă cu una mai simplă: e posibil să găsim un drum – un șir de muchii legate între ele – care să conțină fiecare muchie exact o dată?

Euler a distins două tipuri de drum: un tur deschis, care începe și se termină în vârfuri diferite, și unul închis, care începe și se termină în același vârf. El a demonstrat că pentru o asemenea diagramă nu există nici unul din aceste tipuri de drum.

Cheia problemei este de a considera puterea fiecărui vârf, adică numărul de drumuri care se întâlnesc în acel vârf. Să considerăm mai întâi un tur închis. În acest caz, fiecărei muchii prin care drumul intră într-un vârf îi corespunde o alta, muchia următoare, prin care drumul părăsește vârful. Dacă ar fi posibil un tur închis, atunci numărul muchiilor din orice vârf ar trebui să fie par. Pe scurt, fiecare vârf ar trebui să aibă o putere pară. Dar diagrama are trei vârfuri de putere 3 și unul de putere 5 – toate impare. Așadar nu există tururi închise.

Un criteriu similar se aplică tururilor deschise, dar acum trebuie să existe exact două vârfuri de putere impară: unul la începutul drumului, celălalt la sfârșitul lui. Cum diagrama are patru vârfuri de putere impară, nu există nici tururi deschise.

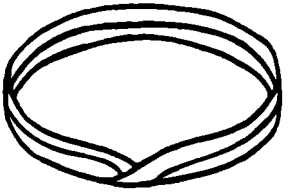
Euler a făcut un pas mai departe: a demonstrat că aceste condiții necesare pentru existența unui tur sunt și suficiente, dacă diagrama este conexă (orice două vârfuri pot fi unite printr-un drum). Acest enunț general e ceva mai greu de demonstrat, iar lui Euler i-a trebuit ceva timp ca să pună la punct demonstrația. Noi putem da astăzi o demonstrație în câteva rânduri.

Proprietățile geometrice ale suprafețelor plane

Cele două descoperiri ale lui Euler par să țină de domenii complet diferite ale matematicii, dar la un examen mai atent au elemente comune. Ambele se referă la combinatorica diagramelor poliedrale. Una numără fețe, muchii și vârfuri, cealaltă numără puteri; una e o relație universală între trei numere, cealaltă o relație care trebuie să fie valabilă dacă există un tur, dar sunt asemănătoare în spirit. La un nivel mai adânc, ambele sunt invariante la transformări continue – lucru care a trecut neobservat timp de mai bine de un secol. Pozițiile vârfurilor și ale muchiilor nu contează: ceea ce contează este cum sunt legate între ele. Ambele probleme ar arăta la fel dacă diagramele ar fi desenate pe o foaie de cauciuc, iar foaia ar fi deformată. Singurul mijloc de a face să apară deosebiri

BANDA LUI MÖBIUS

Topologia are surprizele ei. Cea mai cunoscută e banda lui Möbius, care poate fi formată luând o fâşie lungă de hârtie şi lipindu-i capetele după o semi-răsucire. Fără această răsucire, obţinem un cilindru. Deosebirea dintre aceste două suprafeţe devine evidentă dacă încercăm să le colorăm. Putem colora suprafaţa exterioară a unui cilindru cu roşu, iar cea interioară cu albastru. Dar dacă începem să colorăm o bandă Möbius cu roşu pe una din părţi şi ne deplasăm continuu, vom sfârşi prin a colora cu roşu toată banda. Suprafaţa din interior este legată de cea din exterior datorită acelei semi-răsuciri.



Altă diferenţă apare dacă facem o tăietură de-a lungul liniei centrale a benzii. Ea se desface în două bucăţi care rămân legate între ele.

semnificative ar fi să tăiem sau să rupem foaia, ori să lipim între ele bucăţi ale ei – dar aceste operaţii distrug continuitatea.

Perspectiva unei teorii generale l-a urmărit pe Gauss, care insista asupra necesităţii unei teorii privind proprietăţile geometrice fundamentale ale diagramelor. El a găsit şi un nou invariant topologic, care astăzi se numeşte *numărul de înlănţuire*, într-o lucrare despre magnetism. Acest număr determină modul în care o curbă închisă se înfăşoară în jurul alteia. Gauss a dat o formulă pentru a calcula numărul de înlănţuire pornind de la expresiile analitice ale curbelor. Un invariant similar, *indicele* unei curbe închise în raport cu un punct, apărea implicit într-una dintre demonstraţiile sale la Teorema Fundamentală a Algebrei.

Principala influenţă a lui Gauss asupra dezvoltării topologiei a venit prin unul dintre elevii săi, Johann Listing, şi prin asistentul său Augustus Möbius. Listing a studiat cu Gauss în 1834, iar în lucrarea sa *Vorstudien zur Topologie* a introdus termenul *topologie*. Listing ar fi preferat să numească domeniul „geometria poziţiei", dar această sintagmă fusese deja rezervată de Karl von Staudt pentru a desemna geometria proiectivă, aşa încât Listing a inventat un alt termen. Între altele, Listing a căutat generalizări ale formulei lui Euler pentru poliedre.

Cel care a explicitat rolul transformărilor continue a fost Möbius. Nu a fost cel mai productiv dintre matematicieni, dar trata orice subiect cu multă acurateţe şi acribie. În particular, a observat că suprafeţele nu au întotdeauna două feţe,

dând drept exemplu vestita *bandă a lui Möbius*. Această suprafață a fost descoperită în mod independent de Möbius şi Listing în 1858. Listing a publicat-o în *Der Census räumlicher Complexe,* iar Möbius a menționat-o într-un articol despre suprafețe.

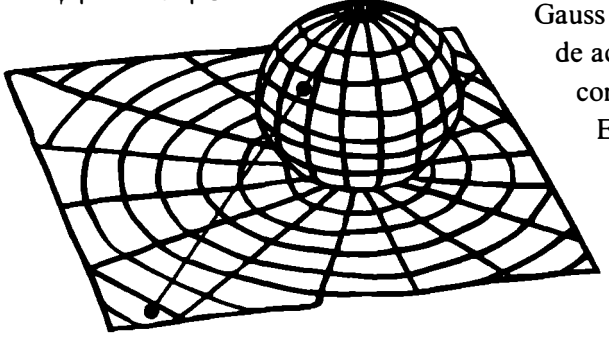
Multă vreme ideile lui Euler despre poliedre au rămas la periferia matematicii, dar câțiva matematicieni de renume au început să întrezărească o nouă abordare a geometriei, pe care au numit-o „analysis situs" – analiza poziției. Ceea ce aveau ei în minte era o teorie *calitativă* a formei, care să completeze tradiționala teorie cantitativă a lungimilor, unghiurilor, ariilor şi volumelor. Această perspectivă a început să câştige teren când asemenea subiecte au apărut în cercetări tradiționale ținând de curentul principal al matematicii. Un pas crucial a fost descoperirea legăturilor între analiza complexă şi geometria suprafețelor, iar marele inovator a fost Riemann.

Sfera lui Riemann

O funcție complexă poate fi cel mai simplu interpretată ca o aplicație de la un plan complex la un altul. Formula fundamentală $w = f(z)$ a unei astfel de funcții ne spune să luăm orice număr complex z, să i-l aplicăm pe f şi să deducem un alt număr complex w asociat cu z. Geometric, z aparține planului complex, iar w aparține unui al doilea exemplar independent al planului complex.

Această perspectivă nu e însă cea mai utilă, iar motivul îl constituie *singularitățile*. Funcțiile complexe au deseori puncte interesante în care comportarea lor normală şi confortabilă o ia razna. De exemplu, funcția $f(z) = 1/z$ se comportă bine pentru orice z, cu excepția lui zero. Când $z = 0$, valoarea funcției este $1/0$, care nu are sens ca număr complex obişnuit, dar care, cu un efort de imaginație, poate fi luat drept infinit (notat ∞). Dacă z se apropie foarte mult de 0, atunci $1/z$ devine foarte mare. Infinitul astfel conceput nu e un număr, ci un termen care descrie un proces numeric: devine oricât de mare dorim. Gauss remarcase deja că infiniții de acest tip creează noi tipuri de comportare în integrarea complexă. Erau importanți.

Sfera lui Riemann şi planul complex



Riemann a găsit util să includă ∞ între numerele complexe şi a descoperit o cale elegantă de a o face.

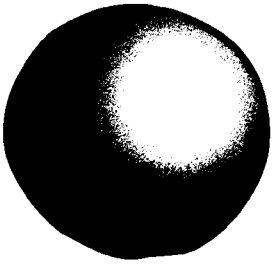
Să considerăm o sferă aşezată deasupra originii planului complex. Să asociem acum punctelor din plan câte un punct de pe sferă prin proiecţie stereografică, adică să unim punctul din plan cu polul nord al sferei şi să vedem unde intersectează dreapta sfera.

Construcţia se numeşte *sfera lui Riemann.* Noul punct de la infinit este polul nord al sferei – unicul punct care nu corespunde unui punct din planul complex. În mod surprinzător, construcţia se potriveşte perfect calculelor din analiza complexă, iar acum egalităţi de tipul $1/0 = \infty$ au sens deplin. Punctele în care o funcţie complexă f ia valoarea ∞ se numesc *poli*, şi se dovedeşte că putem afla multe lucruri despre f dacă ştim unde se găsesc polii săi.

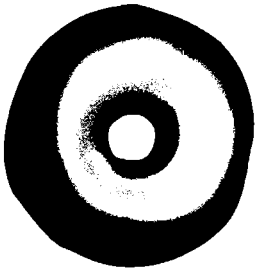
Sfera lui Riemann n-ar fi atras ea singură atenţia asupra aspectelor topologice ale analizei complexe, dar un al doilea tip de de singularitate, numit *punct de ramificare*, a făcut ca topologia să devină esenţială. Cel mai simplu exemplu este funcţia complexă de extragere a rădăcinii pătrate, $f(z) = \sqrt{z}$. Cele mai multe numere complexe au două rădăcini pătrate distincte, exact ca numerele reale. Aceste rădăcini pătrate diferă doar prin semn: una este minus cealaltă. De pildă, rădăcinile pătrate ale lui $2i$ se dovedesc a fi $1 + i$ şi $-1 - i$, la fel cum rădăcinile pătrate ale lui 4 sunt 2 şi –2. Există totuşi un număr complex cu doar o *singură* rădăcină pătrată, anume 0. De ce? Pentru că + 0 şi – 0 sunt egale.

Ca să vedem de ce 0 este un punct de ramificare pentru funcţia rădăcină pătrată, să ne imaginăm că plecăm din punctul 1 al planului complex şi alegem una din cele două rădăcini pătrate. Alegerea naturală este 1. Să deplasăm acum treptat punctul în jurul cercului de rază 1 şi, pe măsură ce avansăm, să alegem pentru fiecare poziţie a punctului aceea din cele două rădăcini pătrate care face ca totul să varieze continuu. În momentul în care am parcurs jumătate din drum, ajungând în –1, rădăcină pătrată a parcurs doar un sfert de drum, până la $+i$, deoarece $\sqrt{-1} = +i$ sau $-i$. Continuând până la parcurgerea întregului cerc, ne întoarcem în punctul de plecare, 1. Dar rădăcina pătrată, care s-a mişcat de două ori mai lent, ajunge în –1. Pentru ca rădăcina pătrată să revină la valoarea ei iniţială, punctul trebuie să parcurgă cercul de *două* ori.

Riemann a găsit o cale de a îmblânzi acest tip de singularitate, dublând sfera Riemann prin două straturi. Aceste straturi sunt separate, cu excepţia punctelor 0 şi ∞. În vecinătatea acestor puncte straturile se contopesc – sau, dacă vreţi, se ramifică din cele două straturi individuale în 0 şi în ∞. În vecinătatea acestor puncte particulare, geometria straturilor seamănă cu o scară în spirală – având proprietatea neobişnuită că dacă urcăm două tururi complete ne întoarcem de unde am plecat. Geometria acestei suprafeţe ne spune multe despre funcţia rădăcină pătrată, iar aceeaşi idee poate fi extinsă la alte funcţii complexe.



Sferă



Tor

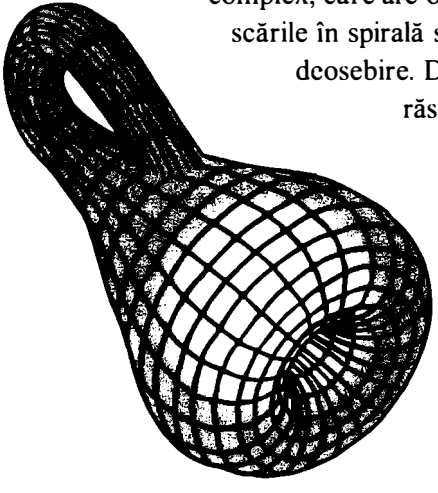
Tor cu două găuri

Descrierea suprafeței e oarecum indirectă, și ne putem întreba ce formă are ea. Aici intră în scenă topologia. Putem deforma în mod continuu descrierea scării în spirală până la ceva mai ușor de vizualizat. Specialiștii în analiza complexă au constatat că din punct de vedere topologic orice suprafață Riemann este fie o sferă, fie un tor, fie un tor cu două găuri, fie un tor cu trei găuri etc. Numărul găurilor, g, se numește *genul* suprafeței, și este același g care apare în generalizarea formulei lui Euler la suprafețe.

Suprafețe orientabile

Genul s-a dovedit important pentru diverse probleme profunde din analiza complexă, care la rândul lor au atras atenția asupra topologiei suprafețelor. S-a dovedit atunci că există o a doua clasă de suprafețe, care diferă de torurile cu g găuri, dar sunt strâns legate de ele. Deosebirea este că torurile cu g găuri sunt suprafețe orientabile, ceea ce din punct de vedere intuitiv înseamnă că au două fețe distincte. Ele moștenesc această proprietate de la planul complex, care are o față deasupra și una dedesubt, deoarece scările în spirală se unesc într-un mod care păstrează această deosebire. Dacă am uni în schimb două rampe ale scării, răsturnând etajele, cele două fețe aparent separate s-ar confunda.

Posibilitatea unui asemenea tip de lipire a fost menționată pentru prima dată de Möbius, a cărui bandă are o singură față și o singură margine. Klein a făcut un pas mai departe, lipind în



Sticla lui Klein. Aparenta intersecție cu ea însăși se datorează reprezentării ei în spațiul tridimensional

mod abstract un disc circular de-a lungul marginii benzii lui Möbius, pentru a elimina complet marginea. Suprafața rezultată, numită *sticla lui Klein*, are o singură față și nici o margine. Dacă încercăm s-o desenăm stând în spațiul tridimensional normal, ea trebuie să treacă prin ea însăși. Dar, ca suprafață abstractă de sine stătătoare (sau ca suprafață din spațiul 4-dimensional), intersecția cu ea însăși nu există.

Teorema privind torurile cu g găuri poate fi reformulată astfel: orice suprafață orientabilă (de întindere finită și fără margini) e topologic echivalentă cu o sferă având g mânere suplimentare (unde g poate fi zero). Există o clasificare asemănătoare a suprafețelor neorientabile (cu o singură față): ele pot fi formate dintr-o suprafață numită *planul proiectiv* prin adăugare a g mânere. Sticla lui Klein este un plan proiectiv cu un singur mâner.

Combinarea acestor două rezultate se numește Teorema de Clasificare a Suprafețelor. Ea ne indică, până la o echivalență topologică, *toate suprafețele posibile* (de întindere finită și fără margini). Prin demonstrarea acestei teoreme, topologia spațiilor bidimensionale – suprafețele – a putut fi considerată cunoscută. Asta nu însemna că orice problemă putea fi rezolvată fără efort, dar oferea un punct de pornire. Teorema de Clasificare a Suprafețelor e un instrument extrem de puternic în topologia bidimensională.

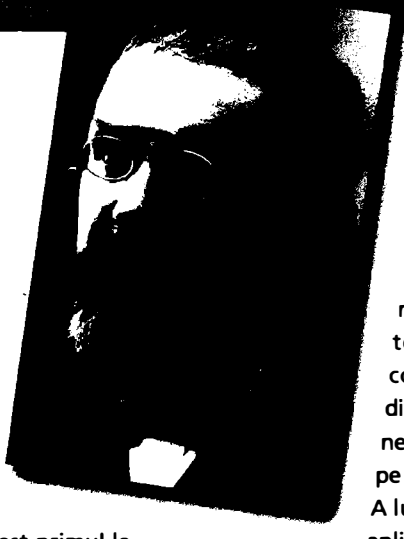
Când ne gândim la topologie, e deseori util să presupunem că spațiul la care ne referim e tot ce există. Nu e nevoie să-l scufundăm într-un spațiu înconjurător, așa încât atenția noastră se concentrează asupra proprietăților intrinseci ale spațiului. O imagine pregnantă este cea a unei ființe minuscule trăind pe o suprafață topologică. Cum ar putea o asemenea ființă, ignorând orice spațiu înconjurător, să descopere pe ce fel de suprafață locuiește? Cum ar putea ea caracteriza intrinsec asemenea suprafețe?

Pe la 1900 fusese înțeles faptul că o cale de a răspunde la aceste întrebări era de a considera bucle închise pe suprafață și de a vedea cum pot fi ele deformate. De exemplu, pe o sferă, orice buclă poate fi deformată continuu până la un punct (contractată). Cercul din jurul ecuatorului, de pildă, poate fi mutat treptat spre polul nord, devenind tot mai mic până ce coincide cu polul nord însuși.

Pe de altă parte, orice suprafață care nu e echivalentă cu o sferă conține bucle ce nu pot fi deformate până la puncte. Asemenea bucle înconjoară o gaură, iar gaura le împiedică să fie contractate. Prin urmare, sfera e singura suprafață în care orice buclă închisă poate fi contractată până la un punct.

Jules Henri Poincaré

1854–1912



Henri Poincaré s-a născut la Nancy, în Franța. Tatăl său, Léon, era profesor de medicină la Universitatea din Nancy, iar mama lui se numea Eugénie (născută Launois). Vărul lui, Raymond Poincaré, a devenit prim-ministru și a fost președintele Republicii Franceze în timpul Primului Război Mondial. Henri a fost primul la toate materiile în liceu și era absolut formidabil la matematică. Avea o memorie excelentă și putea vizualiza forme complicate în trei dimensiuni, ceea ce compensa o vedere atât de slabă încât abia putea vedea tabla, ca să nu mai vorbim de ce scria pe ea.

Primul lui post universitar a fost la Caen în 1879, dar în 1881 a obținut unul mult mai prestigios, la Universitatea din Paris. Acolo a devenit unul dintre matematicienii de frunte ai vremii sale. Lucra sistematic – patru ore pe zi în două perioade de câte două ore, dimineața și după-amiaza târziu. Dar procesele lui mentale erau mai puțin organizate, iar adesea începea să scrie un articol înainte de a ști unde va ajunge cu cercetările sale. Era extrem de intuitiv, cele mai bune idei îi veneau adesea pe când se gândea la altceva.

S-a ocupat de cea mai mare parte a matematicii epocii sale: teoria funcțiilor complexe, ecuații diferențiale, geometrie neeuclidiană și topologie – pe care practic a fondat-o. A lucrat și în domenii aplicative: electricitate, elasticitate, optică, termodinamică, relativitate, teorie cuantică, mecanică cerească și cosmologie.

A câștigat un premiu important într-o competiție inițiată în 1887 de regele Oscar al II-lea al Suediei și Norvegiei. Subiectul era „problema celor trei corpuri" – mișcarea a trei corpuri sub influența gravitației. Lucrarea pe care a depus-o conținea de fapt o greșeală gravă, pe care a corectat-o imediat; ca urmare, a descoperit posibilitatea a ceea ce numim azi haos – o mișcare neregulată și impredictibilă într-un sistem guvernat de legi deterministe. A scris și cărți de popularizare a științei: *Știință și ipoteză* (1901), *Valoarea științei* (1905) și *Știință și metodă* (1908).

Topologie în trei dimensiuni

După spațiile topologice bidimensionale (suprafețele), urmează firesc cele tridimensionale. Acum obiectele de studiu sunt varietăți în sensul lui Riemann, cu deosebirea că noțiunile de distanță sunt ignorate. În 1904, Henri Poincaré,

unul dintre cei mai mari matematicieni ai tuturor timpurilor, a încercat să înțeleagă varietățile tridimensionale și a introdus în acest scop mai multe tehnici. Una dintre ele, *omologia*, studiază relațiile dintre regiunile varietății și frontierele lor. O alta, *omotopia*, urmărește ce se întâmplă cu buclele închise ale varietății atunci când ele sunt deformate.

Omotopia e strâns legată de metodele care serviseră atât de bine pentru suprafețe, iar Poincaré căuta rezultate analoge în trei dimensiuni, iar astfel a ajuns la una dintre cele mai celebre întrebări din întreaga matematică.

Știa că sfera e singura suprafață în care orice buclă închisă poate fi contractată până la un punct. În trei dimensiuni era oare valabilă o caracterizare asemănătoare? O vreme a presupus că da; de fapt, lucrul părea atât de evident, încât nici măcar nu și-a dat seama că făcea o presupunere. Ulterior a înțeles că o versiune plauzibilă a acestei afirmații e falsă, iar o altă formulare strâns înrudită cu ea părea dificil de demonstrat, dar putea fi adevărată. S-a întrebat dacă o varietate tridimensională (fără frontieră, de întindere finită etc.) care are proprietatea că orice buclă din ea poate fi contractată până la un punct trebuie să fie topologic echivalentă cu sfera tridimensională (un analog tridimensional al unei sfere) – iar aceasta avea să devină Conjectura lui Poincaré.

Generalizări ale conjecturii la patru sau mai multe dimensiuni au fost demonstrate, dar topologii continuau să se lupte fără succes cu conjectura inițială a lui Poincaré, în trei dimensiuni.

În anii '80 William Thurston a propus o idee care ar putea lămuri conjectura lui Poincaré făcând-o mai ambițioasă. Conjectura lui de geometrizare merge mai departe și se aplică tuturor varietăților tridimensionale, nu doar celor în care orice buclă poate fi contractată. Punctul ei de plecare e o interpretare a clasificării suprafețelor pe baza geometriei neeuclidiene.

Sfera are curbură pozitivă constantă.

Torul poate fi obținut luând un pătrat din planul euclidian și identificând laturile opuse. Ca atare, e plat – are curbură zero. Sfera are curbură pozitivă constantă. Un tor cu două sau mai multe găuri poate fi reprezentat ca o suprafață de curbură constantă negativă. Astfel, topologia suprafețelor poate fi reinterpretată în funcție de trei tipuri de geometrie, una euclidiană și două neeuclidiene, anume, geometria euclidiană însăși, geometria eliptică (curbură pozitivă) și geometria hiperbolică (curbură negativă).

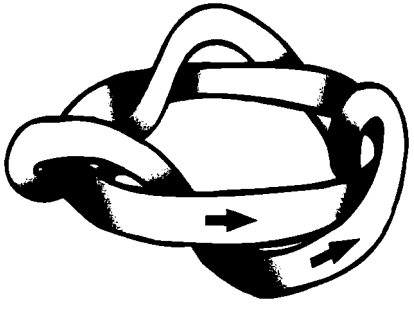
Ceva asemănător se putea oare întâmpla în trei dimensiuni? Thurston a pus în evidență anumite complicații: trebuie considerate opt tipuri de geometrie, nu trei. Și nu mai e posibil să folosim o singură geometrie pentru o varietate dată,

La ce i-a ajutat topologia

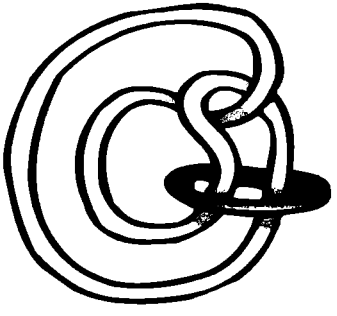
Unul dintre cei mai simpli invarianți topologici a fost inventat de Gauss. Studiind câmpurile electric și magnetic, el s-a întrebat cum se pot lega între ele două bucle închise. A inventat astfel numărul de înlănțuire, care măsoară de câte ori o buclă se înfășoară în jurul alteia. Dacă numărul de înlănțuire e nenul, atunci buclele nu pot fi separate printr-o transformare topologică. Acest invariant nu rezolvă totuși complet problema determinării când pot fi separate două bucle, deoarece uneori invariantul e zero, dar buclele nu pot fi separate.

Gauss a obținut chiar și o formulă analitică pentru acest număr, integrând o anumită cantitate de-a lungul curbei respective. Descoperirile lui Gauss au reprezentat primii pași în ceea ce astăzi este un uriaș domeniu al matematicii – topologia algebrică.

Bucle cu numărul de înlănțuire 3



Aceste bucle nu pot fi separate topologic, deși au numărul de înlănțuire 0.



ci varietatea trebuie tăiată în mai multe bucăți, folosind câte o geometrie pentru fiecare. El și-a formulat conjectura de geometrizare: există întotdeauna un mod sistematic de a tăia o varietate tridimensională în bucăți, fiecare corespunzând unuia dintre cele opt tipuri de geometrie.

Conjectura lui Poincaré ar fi o consecință imediată, deoarece condiția ca toate buclele să se contracte exclude șapte geometrii, lăsând doar geometria de curbură pozitivă constantă – cea a sferei tridimensionale.

O abordare alternativă a venit din geometria riemanniană. În 1982, Richard Hamilton a introdus o nouă tehnică în domeniu, bazată pe ideile matematice folosite de Albert Einstein în relativitatea generală. După Einstein, spațiul-timp

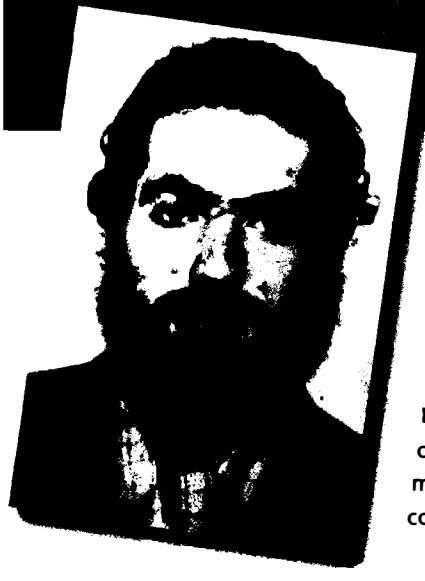
e curbat, iar curbura e dată de forța gravitațională. Curbura e măsurată de așa-numitul tensor de curbură, iar acesta are o rudă mai simplă numită tensorul Ricci, după inventatorul lui, Gregorio Ricci-Curbastro. Modificările în geometria universului de-a lungul timpului sunt guvernate de ecuațiile lui Einstein, care spun că tensorul tensiunii e proporțional cu curbura. De fapt, curbarea gravitațională a universului tinde să se atenueze odată cu scurgerea timpului, iar ecuațiile lui Einsterin ne dau rezultate cantitative.

Același joc poate fi jucat folosind versiunea curburii dată de Ricci, iar el conduce la același tip de comportament: o suprafață care ascultă de ecuațiile curgerii Ricci va tinde în mod natural să-și simplifice geometria redistribuindu-și mai echitabil curbura. Hamilton a arătat că se poate demonstra conjectura lui Poincaré bidimensională folosind curgerea Ricci – în esență, o suprafață în care toate buclele se contractă devine atât de simplă atunci când urmează curgerea Ricci, încât sfârșește prin a se transforma într-o sferă perfectă. Hamilton a mai sugerat și generalizarea acestei abordări la trei dimensiuni, și a făcut progrese în această direcție, dar s-a izbit de unele obstacole dificile.

Perelman

În 2002, Grigori Perelman a produs senzație plasând mai multe articole pe arXiv, un website pentru matematică și fizică, unde cercetătorii pot oferi acces la lucrări nepublicate, deseori nefinalizate. Scopul site-ului este de a scurta timpul de așteptare cât articolele se află la referenți pentru a primi aprobarea de publicare, rol jucat înainte de preprinturi. La prima vedere, lucrările lui Perelman se refereau la curgerea Ricci, dar a devenit limpede că dacă rezultatul era corect, el ar implica valabilitatea conjecturii de geometrizare, deci și a conjecturii lui Poincaré.

Ideea de bază e cea sugerată de Hamilton. Se pornește cu o varietate tridimensională arbitrară, înzestrată cu o definiție a distanței care face ca tensorul Ricci să aibă sens, iar varietatea e pusă să urmeze curgerea Ricci, simplificându-se. Principala complicație este că pot apărea singularități acolo unde varietatea se încrețește și încetează să mai fie netedă. În singularități, metoda propusă nu mai funcționează. Noua idee este de a tăia varietatea în apropierea unei asemenea singularități, de a acoperi găurile rezultate și a lăsa curgerea să continue. Dacă varietatea reușește să se simplifice după apariția doar a unui număr finit de singularități, fiecare bucată va admite doar una dintre cele opt geometrii, iar inversarea operațiilor de tăiere („chirurgie") ne spune cum să lipim înapoi aceste bucăți pentru a reconstitui varietatea.



Grigori Perelman
n. 1966

Perelman s-a născut în 1966 în fosta Uniune Sovietică. Elev fiind, a făcut parte din echipa URSS care a participat la Olimpiada Internațională de Matematică și a câștigat o medalie de aur cu punctajul de 100%. A lucrat în SUA și la Institutul Steklov din Sankt Petersburg, dar în prezent nu deține nici o funcție academică. Firea lui din ce în ce mai retractilă a adăugat o dimensiune umană neobișnuită poveștii matematice. E poate păcat că această poveste confirmă stereotipul matematicianului excentric.

Conjectura lui Poincaré e faimoasă și pentru un alt motiv: ea este una dintre cele opt Probleme Matematice ale Mileniului alese de Institutul Clay, și ca atare rezolvarea ei – atent verificată – atrage un premiu de un milion de dolari. Perelman avea însă propriile sale motive de a nu-și dori premiul – și de a nu dori nici o altă recompensă în afara rezolvării înseși –, de aceea n-a simțit nevoia să-și dezvolte lucrările deseori criptice de pe arXiv pentru a obține ceva publicabil.

Din acest motiv, experții în domeniu și-au elaborat propriile versiuni ale ideilor lui, încercând să completeze orice lacună și să dea lucrării forma acceptabilă a unei veritabile demonstrații. Mai multe asemenea încercări au fost publicate, iar o versiune cuprinzătoare și definitivă a demonstrației lui Perelman a fost acum acceptată de comunitatea topologilor. În 2006 el a primit pentru rezultatele sale în domeniu Medalia Fields, pe care a refuzat-o. Nu toți oamenii își doresc succese lumești.

Topologia și lumea reală

Topologia a fost inventată pentru că matematica, stimulată de probleme fundamentale din domenii cum ar fi analiza complexă, nu putea funcționa fără ea. Topologia caută răspunsul la întrebarea „cum arată lucrul acesta?" într-o formă simplă, dar profundă. Concepte geometrice mai convenționale, cum sunt lungimile, se poate considera că adaugă detalii la informațiile fundamentale oferite de topologie.

La ce ne ajută topologia

În 1956, James Watson și Francis Crick au descoperit secretul vieții – structura dublu elicoidală a moleculei de ADN, coloana vertebrală pe care e depozitată și manipulată informația genetică. Astăzi topologia nodurilor este folosită pentru a înțelege cum se desfac cele două șuvițe spirale când planul genetic controlează dezvoltarea ființei vii.

Spirala ADN e ca o frânghie cu două șuvițe, fiecare șuviță răsucindu-se în mod repetat în jurul celeilalte. Când o celulă se divide, informația genetică este transferată noilor celule prin separarea celor două șuvițe, copierea lor și unirea noilor șuvițe cu cele vechi. Oricine a încercat să separe șuvițele unei bucăți lungi de frânghie știe cât de greu e – șuvițele se încâlcesc –, iar situația ADN-ului e mult mai rea: spiralele însele sunt supra-încolăcite ca și cum frânghia însăși ar fi fost înfășurată pe un tambur. Închipuiți-vă mai mulți kilometri de ață foarte fină înghesuiți într-o minge de tenis și căpătați o idee despre cât de încurcat trebuie să fie ADN-ul într-o celulă.

Biochimia genetică trebuie să tot descurce această ață încâlcită, rapid, în mod repetat și fără greș – însuși lanțul vieții depinde de asta. Cum? Biologii atacă problema folosind enzime pentru a rupe lanțul ADN-ului în bucăți suficient de mici spre a fi studiate în amănunt. Un segment de ADN e un nod molecular complicat, iar același nod poate arăta foarte diferit după ce a fost deformat prin îndoiri și răsuciri.

Șuvițe de ADN înnodate

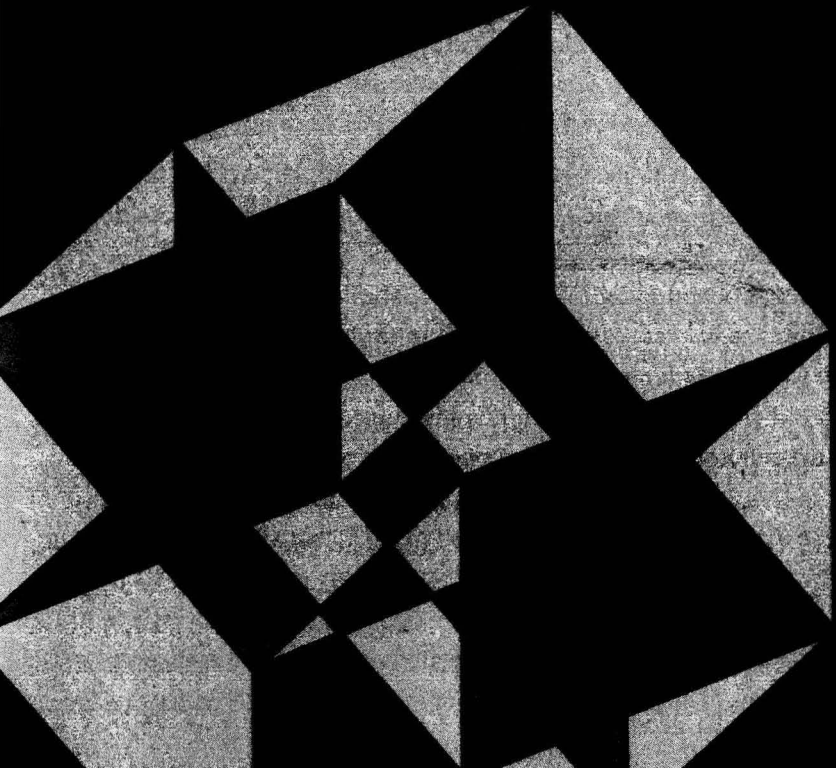
Noile tehnici de studiere a nodurilor deschid direcții noi de cercetare în genetica moleculară. Încetând să mai fie o jucărie a matematicienilor puri, topologia nodurilor capătă importanță practică în biologie. O descoperire recentă este legătura matematică între cantitatea de răsucire a spiralei ADN-ului și cantitatea de supra-încolăcire.

Au existat câțiva precursori ai topologiei, dar ea n-a devenit cu adevărat o ramură a matematicii cu identitate proprie până la jumătatea secolului XIX, când matematicienii au ajuns la o bună înțelegere a topologiei suprafețelor – formele bidimensionale. Extinderea la mai multe dimensiuni a luat un mare avânt la finele secolului XIX şi la începutul secolului XX, mai ales prin cercetările lui Henri Poincaré. În anii '20 s-au făcut mari progrese, iar domeniul a explodat cu adevărat în anii '60, deşi a cam pierdut contactul cu ştiința aplicată.

Infirmând criticile la adresa abstracțiunii din matematica pură a secolului XX, teoria rezultată e acum vitală în multe domenii ale fizicii matematice. Chiar şi cel mai dificil obstacol al ei, conjectura lui Poincaré, a fost depăşit. Privind retrospectiv, principalele dificultăți în dezvoltarea topologiei au fost de ordin intern şi s-au rezolvat prin mijloace abstracte; legăturile cu lumea reală au trebuit să aştepte până la elaborarea tehnicilor necesare.

16

Geometrie din afara acestei lumi



În romanul ştiinţifico-fantastic *Maşina timpului*, Herbert George Wells vorbea despre natura spaţiului şi timpului într-o manieră care acum ne e familiară, dar care trebuie să-i fi nedumerit pe cititorii săi victorieni: „Există cu adevărat patru dimensiuni, trei pe care le numim cele trei plane ale Spaţiului, şi o a patra, Timpul." Pentru a stabili cadrul povestirii sale, el adăuga: „Există însă o tendinţă de a stabili o distincţie ireală între primele trei dimensiuni şi ultima, deoarece conştiinţa noastră se mişcă mereu într-o singură direcţie de-a lungul ultimei, de la începutul până la sfârşitul vieţii noastre. Dar unele spirite filozofice s-au întrebat de ce există tocmai trei dimensiuni – de ce nu şi o altă direcţie perpendiculară pe cele trei? – şi au încercat chiar să construiască o geometrie cu patru dimensiuni." Protagonistul romanului merge apoi mai departe, depăşeşte pretinsele limitări ale conştiinţei umane şi călătoreşte de-a lungul celei de-a patra dimensiuni a timpului, ca şi cum ea ar fi o dimensiune normală a spaţiului.

A patra dimensiune

Arta autorilor de SF constă în a suspenda scepticismul, iar Wells o făcea informându-şi cititorii că „Profesorul Simon Newcomb expusese aceste idei în faţa Societăţii Matematice din New York cu numai o lună şi ceva înainte". Aici Wells se referea probabil la un eveniment real; ştim că Newcomb, un vestit astronom, a ţinut cam în aceeaşi perioadă o conferinţă privind cea de-a patra dimensiune. Conferinţa lui reflecta o schimbare majoră în gândirea matematică şi ştiinţifică, eliberând aceste domenii de presupunerea tradiţională că spaţiul trebuie să aibă trei dimensiuni. Aceasta nu implică posibilitatea călătoriei în timp, dar i-a oferit lui Wells pretextul de a face pătrunzătoare observaţii asupra naturii umane a zilelor noastre, deplasându-l pe călătorul său prin timp într-un viitor neliniştitor.

Maşina timpului, publicată în 1895, rezona cu o obsesie victoriană pentru a patra dimensiune, în care o nevăzută dimensiune suplimentară a spaţiului era invocată drept lăcaş al spectrelor, al spiritelor sau chiar al lui Dumnezeu. A patra

dimensiune a fost proclamată de şarlatani, exploatată de romancieri, speculată de savanţi şi formalizată de matematicieni. Peste doar câteva decenii a patra dimensiune devenise ceva standard în matematică, şi odată cu ea spaţiile cu oricâte dimensiuni – cinci, zece, un miliard, chiar şi o infinitate. Tehnicile şi tiparele de gândire ale geometriei multidimensionale au devenit instrumente de rutină în orice ramură a ştiinţei – chiar şi în biologie şi economie.

A patra dimensiune a fost proclamată de şarlatani, exploatată de romancieri...

Spaţiile multidimensionale rămân aproape necunoscute în afara comunităţii ştiinţifice, dar foarte puţine domenii ale gândirii umane ar putea funcţiona astăzi fără aceste tehnici, oricât de îndepărtate ar părea ele de preocupările umane obişnuite. Savanţii care încearcă să unifice cele două mari teorii ale universului fizic, relativitatea şi mecanica cuantică, presupun că spaţiul ar avea de fapt nouă dimensiuni sau zece, în locul celor trei pe care le percepem. Într-o reluare a disputei legate de geometria neeuclidiană, spaţiul tridimensional e tot mai mult considerat doar o posibilitate între multe altele, nu unicul tip de spaţiu posibil.

Aceste schimbări s-au produs deoarece termeni ca spaţiu şi dimensiune sunt interpretaţi acum într-o manieră mai generală, conformă cu înţelesurile cotidiene, dar deschizând noi perspective. Pentru matematicieni, un *spaţiu* e un ansamblu de obiecte împreună cu o definiţie a distanţei între două obiecte. Inspirându-ne din ideea coordonatelor carteziene, putem spune că dimensiunea unui asemenea spaţiu reprezintă *atâtea numere câte* sunt necesare pentru a specifica un obiect. Cu punctele drept obiecte şi cu definiţia obişnuită a distanţei în plan sau în spaţiu, găsim că planul are două dimensiuni, iar spaţiul trei. Alte ansambluri de obiecte pot avea însă patru sau mai multe dimensiuni, în funcţie de natura obiectelor.

De pildă, să presupunem că obiectele sunt sfere din spaţiul tridimensional. Pentru specificarea unei sfere sunt necesare patru numere (x, y, z, r): trei coordonate (x, y, z) pentru centru, plus raza r. Aşadar, spaţiul tuturor sferelor în spaţiul obişnuit are *patru* dimensiuni. Asemenea exemple arată că probleme matematice naturale pot conduce cu uşurinţă la spaţii de dimensiuni mai mari.

Matematica modernă merge şi mai departe. Spaţiul cu patru dimensiuni este *definit* în mod abstract ca mulţimea cvadruplelor de numere (x_1, x_2, x_3, x_4). Mai general, spaţiul cu n dimensiuni – pentru orice număr întreg n – e definit ca mulţiumea n-pleţilor de numere $(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Într-un fel, asta e totul; ideea stranie şi controversată de spaţiu cu mai multe dimensiuni se reduce la ceva banal: lungi liste de numere.

Perspectiva de acum e clară, dar a trebuit să treacă mult timp pentru a se impune. Matematicienii au discutat, deseori cu patimă, despre semnificația și realitatea spațiilor cu mai multe dimensiuni. A trebuit să treacă un secol pentru ca ideile să fie larg acceptate. Dar aplicațiile acestor spații și reprezentările lor geometrice s-au dovedit atât de utile, încât disputele matematice au încetat.

Spațiu tri- sau cvadridimensional

Ideea actuală de spațiu multidimensional a apărut nu din geometrie, ci din algebră, ca o consecință a încercării eșuate de a construi un sistem numeric tridimensional, analog sistemului bidimensional al numerelor complexe. Deosebirea dintre două și trei dimensiuni apare deja în Elementele lui Euclid. Prima parte a cărții se ocupă de geometria planului, un spațiu cu două dimensiuni. Partea a doua tratează „geometria în spațiu" – geometria spațiului tridimensional. Până în secolul XIX, cuvântul dimensiune a fost folosit numai în acest context.

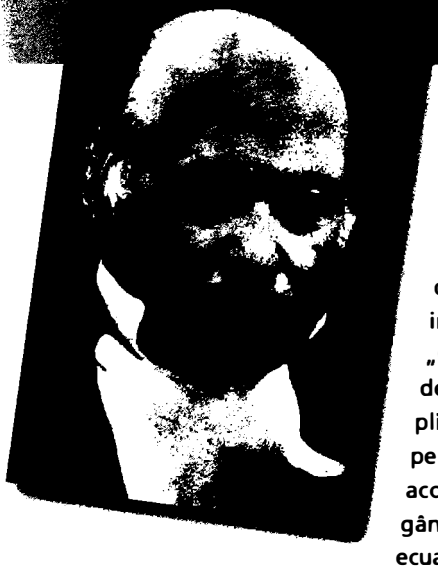
Geometria greacă era o formalizare a simțurilor vizual și tactil, care le permite creierelor noastre să-și formeze modele interne ale relațiilor de poziție din lumea exterioară. Ea era limitată de propriile noastre simțuri și de lumea în care trăim. Grecii credeau că geometria descrie spațiul real în care trăim, iar ei presupuneau că spațiul fizic trebuie să fie cel euclidian. Întrebarea matematică „Poate exista, conceptual vorbind, un spațiu cu patru dimensiuni?" a fost confundată cu întrebarea fizică „Poate exista un spațiu *real* cu patru dimensiuni?". Iar această întrebare a fost confundată apoi cu întrebarea „Pot exista patru dimensiuni *în cadrul propriului nostru spațiu înconjurător*?", la care răspunsul e „Nu". Așadar, toată lumea a crezut că spațiul cvadridimensional e imposibil.

Geometria a început să se elibereze de acest punct de vedere restrictiv atunci când algebriștii Renașterii s-au trezit pe neașteptate în fața unei profunde extinderi a conceptului de număr, acceptând existența unei rădăcini pătrate din minus unu. Wallis, Wessel, Argand și Gauss au interpretat numerele complexe astfel obținute ca puncte din plan, eliberând numerele din cătușele unidimensionale ale dreptei numerelor reale. În 1837, matematicianul irlandez William Rowan Hamilton a redus întregul domeniu la algebră, definind un număr complex $x + iy$ ca pe o *pereche* de numere reale (x, y). El a definit de asemenea adunarea și înmulțirea perechilor prin regulile

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

$$(x, y)\,(u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

William Rowan Hamilton
1805–1865



Precocitatea talentului matematic al lui Hamilton l-a făcut să devină profesor de astronomie la Trinity College pe când era încă student, la vârsta de 21 de ani.

A avut numeroase contribuții matematice, dar cea pe care el însuși a considerat-o cea mai importantă a fost inventarea cuaternionilor. „Cuaternionii – își amintea el – s-au născut pe deplin dezvoltați la 16 octombrie 1843, pe când mă plimbam cu Lady Hamilton prin Dublin și am ajuns pe Brougham Bridge. Vreau să spun că atunci și acolo am simțit că se închide circuitul galvanic al gândului, iar scânteile care au sărit din el au fost ecuațiile fundamentale între *i, j, k, exact așa* cum le-am folosit mereu după aceea. Am scos pe loc un carnețel, care mai există și azi, și mi-am notat ceva ce am simțit *chiar în clipa aceea* că merita să-i închin munca următorilor zece (sau poate cincisprezece) ani. Am simțit brusc că fusese *rezolvată o problemă, fusese împlinită o dorință intelectuală* care mă obsedase timp de mai bine de cincisprezece ani."

Hamilton a cioplit îndată ecuațiile

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

în piatra podului.

Din această perspectivă, o pereche de forma $(x, 0)$ se comportă exact ca numărul real x, iar perechea $(0, 1)$ se comportă ca i. Ideea e simplă, dar pentru a ajunge la ea trebuia înțeles ce înseamnă existența în matematică.

Hamilton și-a propus apoi ceva mai ambițios. Se știa că numerele complexe fac posibilă rezolvarea multor probleme de fizică matematică a sistemelor din plan, folosind metode simple și elegante. Un procedeu similar pentru spațiul tridimensional ar fi fost neprețuit. El a încercat deci să inventeze un sistem numeric tridimensional, în speranța că analiza asociată acestuia va rezolva importante probleme de fizică matematică în spațiul tridimensional. El presupunea tacit că acest sistem va satisface toate legile obișnuite ale algebrei, dar în ciuda unor eforturi eroice n-a reușit să găsească un asemenea sistem.

În cele din urmă a descoperit și de ce. Este imposibil.

Printre legile obişnuite ale algebrei se numără *legea comutativităţii înmulţirii*, care afirmă că $ab = ba$. Hamilton se luptase ani de zile să conceapă o algebră pentru trei dimensiuni. Până la urmă, a găsit una, un sistem de numere pe care le-a numit *cuaternioni*. Dar era o algebră nu pentru trei, ci pentru patru dimensiuni, iar înmulţirea ei nu era comutativă.

Cuaternionii seamănă cu numerele complexe, dar în loc de un singur nou număr, i, există trei: i, j, k. Un cuaternion e o combinaţie a acestora, de exemplu $7 + 8i - 2j + 4k$. La fel cum numerele complexe sunt bidimensionale, alcătuite din două cantităţi independente, 1 şi i, cuaternionii sunt cvadridimensionali, alcătuiţi din *patru* cantităţi independente, 1, i, j şi k. Ei pot apărea algebric sub forma unor cvadrupleţi de numere reale, cu reguli particulare pentru adunare şi înmulţire.

Spaţiul cu mai multe dimensiuni

Când Hamilton şi-a făcut descoperirea, matematicienii ştiau deja că spaţiile cu mai multe dimensiuni apar în mod absolut firesc şi au interpretări fizice logice dacă elementele fundamentale ale spaţiului sunt altceva decât puncte. În 1846 Julis Plücker a arătat că pentru a specifica o *dreaptă* în spaţiu sunt necesare *patru* numere. Două dintre ele determină unde intersectează dreapta un anumit plan fixat, iar alte două determină direcţia ei în raport cu acest plan. Astfel, considerat ca un ansamblu de drepte, spaţiul nostru înconjurător are deja patru dimensiuni, nu trei. Exista totuşi senzaţia că această construcţie era oarecum artificială, iar spaţiile alcătuite din puncte cvadridimensionale erau nenaturale. Cuaternionii lui Hamilton erau interpretaţi ca rotaţii, iar algebra lor era foarte interesantă. Erau la fel de naturali ca numerele complexe – aşa încât spaţiul cvadridimensional era la fel de natural ca planul.

Prezentarea lui era mistică şi destul de abstractă...

Ideea a depăşit repede limita celor patru dimensiuni. Pe când Hamilton vorbea despre dragii lui cuaternioni, un profesor de matematică pe nume Hermann Günther Grassmann descoperea o extindere a sistemului numerelor la spaţii cu oricât de multe dimensiuni. El şi-a publicat ideea în 1844 în *Prelegeri despre extensia liniară*. Prezentarea lui era mistică şi destul de abstractă, aşa încât lucrarea a atras prea puţină atenţie. În 1862, pentru a contracara lipsa de interes, a publicat o versiune revăzută, deseori tradusă drept *Analiza extensiei*, care se dorea să fie mai uşor de înţeles. Din păcate, nu era.

În ciuda răcelii cu care a fost primită, lucrarea lui Grassmann era de o excepțională însemnătate. El a înțeles că cele patru unități ale cuartermionilor 1, i, j și k puteau fi înlocuite prin orice număr de unități. A numit combinațiile acestor unități *hipernumere*. Și-a dat seama că abordarea lui avea unele limitări. Nu trebuie să așteptăm prea mult de la hipernumere; obediența față de legile tradiționale ale algebrei nu duce de regulă nicăieri.

Între timp, fizicienii își dezvoltau propriile lor idei privind spațiile cu mai multe dimensiuni, motivate nu de geometrie, ci de ecuațiile electromagnetismului deduse de Maxwell. Aici atât câmpul electric, cât și cel magnetic sunt *vectori* – având o direcție în spațiul tridimensional, precum și o mărime. Vectorii sunt ca niște săgeți aliniate la câmpul electric sau magnetic. Lungimea săgeții arată cât de intens e câmpul, iar direcția ei arată încotro e îndreptat el.

Fizicienii își dezvoltau propriile lor idei privind spațiile cu mai multe dimensiuni.

Cu notația epocii, ecuațiile lui Maxwell erau în număr de opt, dar ele cuprindeau două grupuri de trei ecuații, una pentru fiecare componentă a câmpului electric sau magnetic în cele trei direcții ale spațiului. Lucrurile s-ar fi simplificat prin inventarea unui formalism care să condenseze fiecare asemenea triplet într-o singură ecuație vectorială, ceea ce Maxwell a făcut folosind cuaternionii, dar abordarea lui era greoaie. În mod independent, fizicianul Josiah Willard Gibbs și inginerul Oliver Heaviside au găsit o cale mai simplă de reprezentare algebrică a vectorilor. În 1881, Gibbs a tipărit o broșură intitulată *Elemente de analiză vectorială* pentru a veni în sprijinul studenților săi. Ideile lui, spunea el, urmăreau un scop pragmatic, iar nu eleganța matematică. Notele sale au fost scrise de Edwin Wilson, și ei au publicat împreună în 1901 o carte intitulată *Analiza vectorială*. Heaviside a venit cu aceleași idei în primul volum al tratatului său *Teoria electromagnetică* din 1893 (celelalte două volume au apărut în 1899 și 1912).

Cuaternionii lui Hamilton, numerele hipercomplexe ale lui Grassmann și vectorii lui Gibbs au convers rapid către aceeași descriere matematică a vectorului: un triplet (x, y, z) de numere. După 250 de ani, matematicienii și fizicienii se întorceau la Descartes – dar notația coordonatelor nu era totul. Tripletele nu reprezentau doar puncte, ci mărimi direcționate. Deosebirea era enormă – nu în privința formalismului, ci a interpretării lui, a *semnificației* lui fizice.

Matematicienii s-au întrebat câte sisteme de numere hipercomplexe pot exista. Pentru ei, întrebarea nu era „Sunt ele utile?", ci „Sunt ele interesante?". Matematicienii s-au concentrat deci asupra proprietăților algebrice ale sistemelor

de *n* numere hipercomplexe, pentru un *n* oarecare. Acestea erau de fapt spații *n*-dimensionale, *plus* operații algebrice, dar pentru început cu toții gândeau algebric, iar aspectele geometrice erau lăsate în umbră.

Geometria diferențială

Geometrii au replicat la invadarea teritoriului lor de către algebriști reinterpretând geometric numerele hipercomplexe. Personajul principal aici a fost Riemann. El lucra la „abilitarea" care-i dădea dreptul să fie plătit pentru cursurile ținute studenților. Candidații la abilitare trebuiau să țină o prelegere despre cercetările lor. Urmând procedura obișnuită, Gauss i-a cerut lui Riemann să propună mai multe subiecte, dintre care Gauss urma să aleagă. Una din propunerile lui Riemann a fost „Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei", iar Gauss, care se gândise la aceeași problemă, a ales acest subiect.

Riemann era îngrozit – nu-i plăcea să vorbească în public şi nu-şi dusese ideile până la capăt.

Riemann era îngrozit – nu-i plăcea să vorbească în public şi nu-şi dusese ideile până la capăt. Dar ceea ce avea în minte era exploziv: o geometrie în *n* dimensiuni, prin care el înțelegea un sistem de *n* coordonate $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ înzestrat cu o definiție a distanței între puncte învecinate. Un astfel de spațiu l-a numit varietate. Propunerea era radicală, dar exista o altă trăsătură încă mai radicală: varietățile puteau fi curbate. Gauss studiase curbura suprafețelor şi obținuse o frumoasă formulă care reprezenta curbura intrinsec – adică numai în funcție de suprafața însăşi, nu şi de spațiul în care era scufundată.

Riemann voise să găsească o formulă similară pentru curbura unei varietăți, generalizând formula lui Gauss la *n* dimensiuni. Această formulă ar fi fost de asemenea intrinsecă varietății – n-ar fi utilizat explicit nici un spațiu care o conținea. Eforturile lui Riemann de a defini curbura într-un spațiu cu *n* dimensiuni l-au adus în pragul unei căderi nervoase. În plus, el îl ajuta în acelaşi timp pe Weber, un coleg al lui Gauss, să înțeleagă electricitatea. Riemann a perseverat, iar efectul combinat al forțelor electrice şi magnetice l-a condus spre un nou concept de forță, bazat pe geometrie. A avut aceeaşi idee care, câteva decenii mai târziu, l-a condus pe Einstein spre relativitatea generală: forțele pot fi înlocuite prin curbura spațiului.

În mecanica tradițională, corpurile se mişcă de-a lungul unor drepte, atâta timp cât nu sunt deviate de o forță. În geometriile curbate, dreptele pot să nu existe, iar traiectoriile sunt curbate. Dacă spațiul e curbat, ceea ce resimți atunci

când eşti obligat să deviezi de la o dreaptă seamănă cu o forţă. Riemann avea acum punctul de pornire pentru prelegerea pe care a susţinut-o în 1854. A fost un mare triumf. Ideile s-au răspândit rapid, făcând vâlvă. Oamenii de ştiinţă au început să ţină conferinţe de popularizare a noii geometrii. Între ei, Hermann von Helmhotz, care vorbea despre fiinţe ce trăiau pe o sferă sau pe o altă suprafaţă curbată.

Aspectele tehnice ale geometriei varietăţilor introduse de Riemann, numită astăzi geometrie diferenţială, au fost dezvoltate mai departe de Eugenio Beltrami, Elwin Bruno Christoffel şi de şcoala italiană condusă de Gregorio Ricci şi Tullio Levi-Civita. Ulterior, rezultatele lor s-au dovedit a fi tocmai cele de care avea nevoie Einstein pentru relativitatea generală.

Algebra matricială

Şi algebriştii au făcut progrese, elaborând tehnicile de calcul ale algebrei cu n variabile – simbolismul formal al spaţiului n-dimensional. Una dintre aceste tehnici a fost algebra matricelor, tablouri dreptunghiulare de numere, introduse de Cayley în 1855. Acest formalism a apărut firesc din ideea schimbării de coordonate. Devenise ceva uzual să simplifici formulele algebrice prin înlocuirea unor variabile x şi y cu combinaţii liniare de tipul

$$u = ax + by$$
$$v = cx + dy$$

unde a, b, c, d sunt constante. Cayley a reprezentat perechea (x, y) ca un vector coloană, iar coeficienţii printr-un tabel 2×2 numit *matrice*. Cu o definiţie convenabilă a înmulţirii, el a rescris schimbarea de coordonate sub forma

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

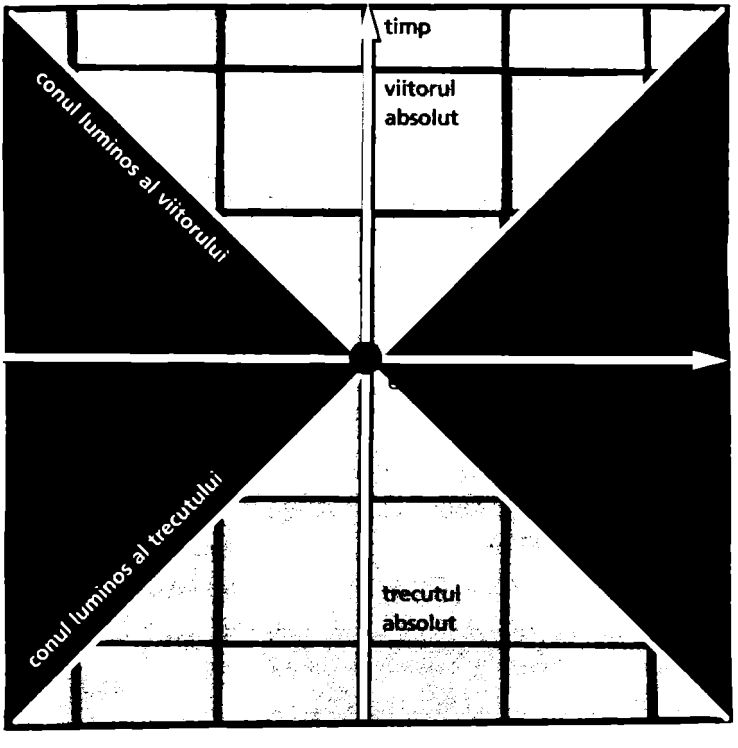
Metoda s-a extins uşor la tabele cu orice număr de linii şi coloane, reprezentând transformări liniare în orice număr de coordonate.

Algebra matricială a făcut posibile calculele în spaţiul n-dimensional. Pe măsura asimilării noii idei, a apărut un nou limbaj geometric bazat pe un sistem formalizat de calcul algebric. Cayley credea că ideea lui nu era decât o notaţie convenabilă şi a prezis că nu va avea niciodată o aplicaţie. Astăzi ea străbate întreaga ştiinţă, fiind indispensabilă în special în domenii precum statistica. Testele medicale sunt mari consumatoare de matrice, care sunt folosite pentru a stabili asocierile statistic semnificative între cauză şi efect.

La ce i-a ajutat geometria multidimensională

În 1907 matematicianul german Hermann Minkowski a formulat teoria relativității speciale a lui Einstein în termenii unui *spațiu-timp* cvadridimensional, combinând timpul unidimensional și spațiul tridimensional într-un singur obiect matematic. Acesta se numește *spațiul-timp Minkowski*.

Relativitatea impune ca metrica naturală a spațiului-timp Minkowski să nu fie cea determinată de Teorema lui Pitagora, în care pătratul distanței de la un punct (x, t) la origine este $x^2 + t^2$, ci $x^2 - ct^2$, unde c este viteza luminii. Modificarea crucială este aici semnul minus, care arată că evenimentele din spațiu-timp sunt asociate cu două conuri. Unul din conuri (reprezentat aici ca un triunghi, deoarece spațiul a fost redus la o singură dimensiune) reprezintă viitorul evenimentului, celălalt trecutul lui. Această reprezentare geometrică e folosită de aproape toți fizicienii din zilele noastre.



Imaginile geometrice au uşurat demonstrarea teoremelor. Criticii au obiectat că aceste noi geometrii se refereau la spaţii inexistente. Algebriştii au replicat arătând că algebra în n variabile exista în mod cert, şi că orice ajuta la progresul mai multor domenii ale matematicii nu putea să nu fie interesant. George Salmoin scria: „Am lămurit deja complet această problemă [rezolvarea unui anumit sistem de ecuaţii] atunci când ni se dau trei ecuaţii în trei variabile. Suntem confruntaţi acum cu problema corespunzătoare în spaţiul cu p dimensiuni. Noi credem însă că e o chestiune pur algebrică, ruptă de orice consideraţii geometrice. Vom reţine totuşi puţin *limbaj* geometric... fiindcă putem astfel vedea mai uşor cum se aplică unui sistem de p ecuaţii procedee analoge celor pe care le-am întrebuinţat într-un sistem de trei."

Spaţiul real

Există oare mai mult de trei dimensiuni? Desigur, răspunsul depinde de ce anume înţelegem prin „există", dar oamenii ignoră de regulă asemenea subtilităţi, mai ales când se aprind pasiuni. Dezbaterea a atins apogeul în 1869. Într-o faimoasă scrisoare adresată Asociaţiei Matematice Britanice, republicată ulterior sub titlul *Pledoarie pentru matematician*, James Joseph Sylvester arăta că generalizarea e o cale importantă pentru progresul matematicii. Contează *ce poate fi conceput*, spunea Sylvester, nu ce corespunde direct experienţei fizice. Cu puţin exerciţiu, mai spunea el, poţi vizualiza cele patru dimensiuni, deci spaţiul cvadridimensional poate fi conceput.

Natura spaţiului real e irelevantă pentru considerentele matematice.

Asta l-a înfuriat atât de tare pe shakespearologul Clement Ingleby, încât l-a invocat pe marele filozof Immanuel Kant pentru a demonstra că tridimensionalitatea e o trăsătură esenţială a spaţiului – ceea ce dovedea că nu înţelesese nimic din ideea lui Sylvester. Natura spaţiului *real* e irelevantă pentru considerentele matematice. Totuşi, pentru o vreme, majoritatea matematicienilor britanici au fost de acord cu Ingleby. Dar unii matematicieni de pe continent erau de altă părere. Grassmann spunea: „Teoremele analizei extensiei nu sunt doar traduceri ale unor rezultate geometrice în limbaj abstract; ele au o semnificaţie mult mai generală, fiindcă, în vreme ce geometria obişnuită rămâne legată de cele trei dimensiuni ale spaţiului [fizic], ştiinţa abstractă nu cunoaşte această limitare."

Sylvester şi-a apărat poziţia: „Mulţi privesc ideea de spaţiu generalizat ca pe o simplă deghizare a formalismului algebric; dar acelaşi lucru se poate spune

despre ideea noastră de infinit sau de drepte imposibile sau de drepte făcând în geometrie un unghi zero, idei a căror utilitate nimeni n-o va contesta. Dr Salmon în generalizarea sa la suprafețe a teoriei caracteristicilor a lui Chasles, Dl Clifford într-o problemă de probabilități și eu însumi în teoria partițiilor, precum și în articolul meu despre proiecția baricentrică – cu toții am simțit utilitatea practică a tratării spațiului cu patru dimensiuni ca un spațiu care poate fi conceput și am adus dovezi în această privință."

Spațiul multidimensional

În cele din urmă, Sylvester a câștigat disputa. Acum matematicienii consideră că ceva există dacă nu e logic contradictoriu; ar putea contrazice experiența fizică, dar lucrul acesta e irelevant pentru existența *matematică*. În acest sens, spațiile multidimensionale sunt la fel de reale ca spațiul obișnuit cu trei dimensiuni, pentru că e la fel de ușor să li se dea o definiție formală.

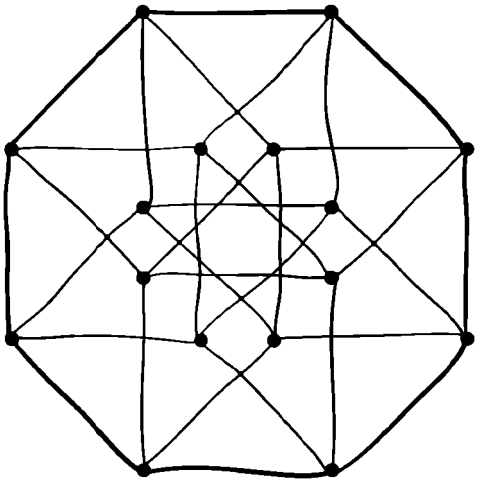
Matematica spațiilor multidimensionale, așa cum e concepută azi, e pur algebrică și se bazează pe generalizări evidente din spații cu mai puține dimensiuni. De exemplu, orice punct din plan (un spațiu bidimensional) poate fi determinat prin cele două coordonate ale sale, iar orice punct din spațiul tridimensional poate fi determinat prin cele trei coordonate ale sale. E firesc să definim un punct din spațiul cvadridimensional ca un set de patru coordonate, și, mai general, să definim un punct din spațiul n-dimensional ca o listă de n coordonate. Atunci spațiul n-dimensional (sau n-spațiul) nu e decât mulțimea tuturor punctelor de acest tip.

Metode algebrice similare ne permit să definim distanța dintre orice două puncte din spațiul n-dimensional, unghiul dintre două drepte etc. De aici încolo e o problemă de imaginație: majoritatea formelor perceptibile în două sau trei dimensiuni își au analogul imediat în n dimensiuni, iar calea de a-l găsi este de a descrie formele cunoscute folosind algebra coordonatelor și de a extinde apoi această descriere la n coordonate.

În prezent, această perspectivă se numește algebră liniară.

De pildă, un cerc în plan sau o sferă în spațiul tridimensional constau din totalitatea punctelor situate la o distanță fixă (raza) de un punct dat (centrul). Analogul evident din spațiul n-dimensional este totalitatea punctelor situate la o distanță fixă (raza) de un punct dat. Folosind formula pentru distanțe, aceasta devine o condiție pur algebrică, iar obiectul rezultat se numește hipersferă $(n-1)$-dimensională sau $(n-1)$-sferă. Dimensiunea scade de la n la $n-1$

deoarece, de exemplu, un cerc în spațiul 2-dimensional este o curbă, care e un obiect 1-dimensional; analog, o sferă din spațiu e o suprafață 2-dimensională. O hipersferă *plină* în n dimensiuni se numește n-bilă. Astfel, Pământul este o bilă tridimensională, iar suprafața lui este o sferă bidimensională.



Un hipercub 4-dimensional proiectat pe un plan

În prezent, această perspectivă se numește *algebră liniară*. Ea e folosită pretutindeni în matematică și știință, mai ales în inginerie și statistică. E de asemenea o tehnică standard în științele economice. Cayley afirmase că era puțin probabil ca matricele lui să aibă vreo aplicație practică. Cu greu s-ar fi putut înșela mai mult.

Pe la 1900, previziunile lui Sylvester începuseră să se adeverească printr-o explozie de domenii matematice în care noțiunea de spațiu multidimensional avea un mare impact. Unul dintre aceste domenii a fost relativitatea lui Einstein, care poate fi privită ca un tip particular de geometrie cvadridimensională a spațiului-timp. În 1908 Hermann Minkowski a înțeles că cele trei coordonate ale spațiului obișnuit, împreună cu una suplimentară pentru timp, formează un *spațiu-timp* cvadridimensional. Un punct din spațiul-timp se numește *eveniment*: el e asemenea unei particule punctiforme care ia ființă la un anumit moment, iar apoi dispare. Relativitatea se ocupă de fapt cu fizica evenimentelor. În mecanica tradițională, o particulă mișcându-se în spațiu ocupă la momentul t coordonatele $(x(t), y(t), z(t))$, iar poziția aceasta se schimbă odată cu trecerea timpului. Din perspectiva spațiului-timp Minkowski, ansamblul tuturor acestor puncte e o curbă în spațiul-timp, *linia de univers* a particulei, iar ea e un obiect de sine stătător, existent o dată pentru totdeauna. În relativitate, cea de-a patra dimensiune are o interpretare unică, fixă: timpul.

Încorporarea ulterioară a gravitației, în relativitatea generală, a folosit din plin geometriile revoluționare ale lui Riemann, dar modificate astfel încât să se adapteze reprezentării lui Minkowski pentru un spațiu-timp plat – așa cum arată spațiul și timpul în absența oricărei mase care să creeze distorsiuni gravitaționale, care pentru Einstein se traduc prin curbură.

Matematicienii preferau o concepție mai flexibilă privind dimensionalitatea, iar la începutul secolului XX matematica însăși părea, mai mult ca oricând, să

impună acceptarea geometriei multidimensionale. Teoria funcțiilor de două variabile complexe, o prelungire naturală a analizei complexe, presupunea considerarea a două dimensiuni complexe – dar fiecare dimensiune complexă se reduce la două dimensiuni reale, așa încât în mod obligatoriu ai de-a face cu un spațiu cvadridimensional. Varietățile lui Riemann și algebra cu mai multe variabile ofereau motivații suplimentare.

Coordonatele generalizate

Un alt imbold spre geometria multidimensională a fost reformularea mecanicii făcută de Hamilton în 1835 în termenii coordonatelor generalizate, idee inițiată de Lagrange în a sa *Mecanică analitică* din 1788. Un sistem mecanic are atâtea coordonate câte grade de libertate are – adică moduri de a-și schimba starea. De fapt, numărul gradelor de libertate nu e decât dimensiune deghizată.

De exemplu, pentru a preciza configurația unei biciclete obișnuite e nevoie de șase coordonate generalizate: una pentru unghiul dintre mânerele ghidonului și cadru, câte una pentru fiecare dintre pozițiile unghiulare ale celor două roți, alta pentru osia pedalelor, încă două pentru pozițiile rotaționale ale pedalelor înseși. O bicicletă este, desigur, un *obiect* tridimensional, dar spațiul *configurațiilor* posibile ale bicicletei este 6-dimensional – unul din motivele pentru care nu e simplu să înveți să mergi pe bicicletă. Creierul tău trebuie să construiască o reprezentare internă a felului în care interacționează aceste șase variabile – trebuie să înveți să navighezi prin geometria 6-dimensională a spațiului ei. Pentru o bicicletă în mișcare mai există și cele șase viteze care corespund acestor șase dimensiuni: în esență, dinamica ei are douăsprezece dimensiuni.

Pe la 1920, această convergență între fizică, matematică și mecanică izbutise pe deplin, iar utilizarea limbajului geometric pentru probleme multidimensionale – geometria multidimensională – încetase să mai ridice semne de întrebare, exceptându-i poate pe filozofi. În 1950 se ajunsese până acolo încât tendința firească a matematicienilor era să formuleze de la bun început totul în n dimensiuni. Teoriile limitate la două sau trei dimensiuni păreau demodate și ridicol de restrictive.

Limbajul spațiilor cu mai multe dimensiuni s-a răspândit rapid în toate domeniile științei, și a invadat chiar domenii ca economia și genetica. Astăzi, virusologii concep virușii ca puncte într-un spațiu al secvențelor de ADN care au sute de dimensiuni. Prin aceasta ei înțeleg faptul că genomul acestor viruși conține sute de baze ADN – dar imaginea geometrică nu e doar o metaforă: ea oferă un mod eficace de a pune problema.

Nimic din toate acestea nu sugerează însă că ar exista o lume a spiritelor, că fantomele ar avea acum un sălaş credibil sau că într-o bună zi am putea fi vizitaţi (precum în *Flatland*-ul lui Edwin Abbot) de un locuitor al Hipersferei, o fiinţă din A Patra Dimensiune, care ne-ar apărea ca o sferă al cărei volum se schimbă mereu, putând să se contracte până la un punct şi să dispară din universul nostru. Şi totuşi, fizicienii care lucrează în teoria supercorzilor cred acum că universul nostru ar putea avea de fapt nu patru, ci zece dimensiuni. După ultimele lor interpretări, noi n-am observat niciodată cele şase dimensiuni suplimentare pentru că ele sunt înfăşurate prea strâns pentru a fi detectate.

Universul nostru ar putea avea de fapt nu patru, ci zece dimensiuni.

Geometria mutidimensională e unul dintre cele mai spectaculoase domenii în care matematica pare să piardă orice contact cu realitatea. Din moment ce spaţiul fizic are trei dimensiuni, cum pot exista spaţii cu patru sau mai multe dimensiuni? Şi chiar dacă ele pot fi definite matematic, cum pot ele folosi la ceva?

Eroarea aici este de a aştepta ca matematica să fie o traducere evidentă şi literală a realităţii observate în maniera cea mai directă. Suntem de fapt înconjuraţi de obiecte care pot fi cel mai bine descrise printr-un mare număr de variabile, „gradele de libertate" ale acelor obiecte. Pentru a preciza, de pildă, poziţia scheletului uman e nevoie de cel puţin o sută de variabile. Din punct de vedere matematic, descrierea firească a unor asemenea obiecte face apel la spaţii multidimensionale, cu câte o dimensiune pentru fiecare variabilă.

Matematicienilor le-a trebuit mult timp ca să formalizeze asemenea descrieri, şi încă şi mai mult ca să convingă nematematicienii de utilitatea lor. Astăzi, ele sunt atât de adânc înrădăcinate în gândirea ştiinţifică, încât le folosim automat. Ele sunt omniprezente în economie, biologie, fizică, inginerie, astronomie... şi lista e fără sfârşit.

Avantajul geometriei multidimensionale este că foloseşte capacităţile vizuale ale omului în probleme care iniţial nu sunt deloc vizuale. Deoarece creierele noastre sunt înclinate spre gândirea vizuală, această formulare poate deseori conduce la descoperiri neaşteptate, la care nu s-ar ajunge cu uşurinţă pe alte căi. Conceptele matematice care nu au o legătură directă cu lumea reală au deseori cu ea legături indirecte mai profunde. Aceste conexiuni ascunse sunt cele care fac matematica atât de utilă.

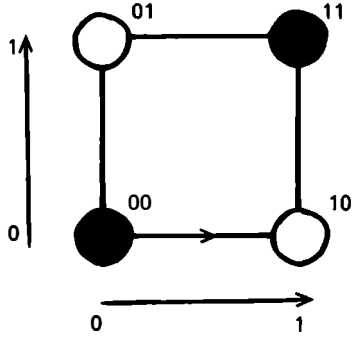
La ce ne ajută geometria multidimensională

Telefonul mobil folosește spațiile multidimensionale.

La fel și conexiunea de Internet, televiziunea prin satelit sau prin cablu și practic toate dispozitivele care transmit sau primesc informații. Comunicațiile moderne sunt digitale. Toate mesajele, chiar și cele vocale transmise prin telefon, sunt convertite în șiruri de 0 și de 1 – cifrele binare.

Comunicațiile nu sunt foarte utile dacă nu sunt fiabile – mesajul primit trebuie să fie exact același cu cel care a fost trimis. *Hardware*-ul electronic nu poate garanta acest tip de acuratețe, deoarece interferența sau chiar trecerea unei raze cosmice pot provoca erori. De aceea inginerii electroniști folosesc tehnici matematice de codificare a informației, așa încât erorile să poată fi detectate și chiar corectate. Baza acestor coduri este matematica spațiilor multidimensionale.

Aceste spații apar deoarece un șir de, să zicem, zece cifre binare, sau *biți*, cum ar fi 1001011100, poate fi privit ca un punct într-un spațiu cu zece dimensiuni, ale cărui coordonate sunt 0 sau 1. Multe probleme importante legate de codurile detectoare și corectoare de erori sunt abordate cel mai bine prin geometria acestui spațiu.



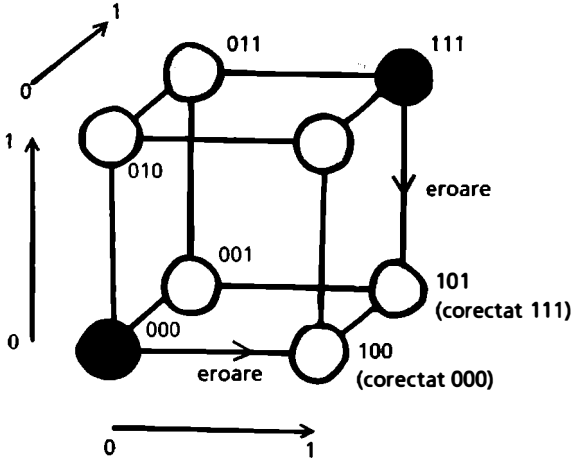
Geometria perechilor de cifre binare

De exemplu, putem detecta (dar nu și corecta) câte o singură eroare dacă la codificarea mesajului înlocuim fiecare 0 cu 00 și fiecare 1 cu 11. Atunci mesajul 110100 se codifică prin 111100110000. Dacă acesta e recepționat ca 111**10**00110000, cu o eroare în al patrulea bit, știm că ceva n-a mers bine deoarece perechea îngroșată **10** n-ar fi trebuit să apară. Dar nu știm dacă trebuie să avem 00 sau 11. Acest lucru poate fi ilustrat cel mai bine printr-o figură bidimensională (corespunzând lungimii 2 a cuvintelor de cod 00 și 11). Considerând că biții cuvintelor de cod sunt coordonate pe două axe (corespunzând primei și,

respectiv, celei de-a doua cifre a cuvântului de cod), putem face un desen în care cuvintele de cod corecte 00 și 11 sunt vârfuri diagonal opuse ale unui pătrat.

Orice eroare simplă le transformă în cuvinte de cod situate în celelalte două vârfuri – care nu sunt cuvinte de cod corecte. Deoarece însă aceste vârfuri sunt alăturate ambelor cuvinte de cod corecte, erori diferite pot duce la același rezultat. Pentru a obține un cod corector de erori, putem folosi cuvinte de cod de lungime trei, codificându-l pe 0 prin 000 și pe 1 prin 111. Acum cuvintele de cod sunt situate în vârfurile unui cub din spațiul tridimensional. Orice eroare simplă are drept rezultat un cuvânt alăturat; în plus, fiecare asemenea cuvânt de cod incorect este alăturat unui singur cuvânt de cod corect, 000 sau 111.

Această codificare a mesajelor digitale a fost făcută pentru prima dată de Richard Hamming în 1947. Interpretarea geometrică a venit la scurtă vreme, și ea s-a dovedit esențială pentru elaborarea unor coduri mai eficiente.



Cod corector de erori folosind secvențe de lungime trei

17

Așezarea matematicii pe baze solide

Pe măsură ce suprastructura matematicii creştea tot mai mult, câțiva matematicieni au început să se întrebe dacă fundațiile îi pot suporta greutatea. O serie de crize ale fundamentelor – în particular controversele privind noțiunile elementare ale analizei şi confuzia generală legată de seria Fourier – arătase că noțiunile matematicii trebuiau definite cu multă atenție şi precizie pentru a evita capcanele logice. Altminteri, turnurile de deducții se puteau prăbuşi în contradicții logice din cauza impreciziei sau ambiguității de la bază.

Pentru început, asemenea temeri se concentraseră asupra unor idei complicate, cum ar fi seria Fourier. Treptat însă lumea matematică şi-a dat seama că şi unele idei elementare puteau fi suspectate. Între ele se afla în primul rând noțiunea de număr. Teribilul adevăr era că matematicienii investiseră atât de mult efort în descoperirea proprietăților profunde ale numerelor, încât omiseseră să mai întrebe ce *este* un număr. Iar atunci când au trebuit să dea o definiție logică, n-au putut.

Dedekind

În 1858, pe când preda un curs de analiză, Dedekind a început să fie preocupat de bazele analizei. Nu de folosirea limitelor, ci de sistemul numerelor reale. El şi-a publicat ideile în 1872, sub titlul *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (*Continuitatea şi numerele iraționale*), arătând că unele proprietăți aparent evidente ale numerelor reale nu fuseseră niciodată demonstrate riguros. Un exemplu citat de el este egalitatea $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$. Evident, ea rezultă ridicând la pătrat ambii membri – numai că înmulțirea numerelor iraționale nu fusese niciodată definită. În cartea sa din 1888 *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*Ce sunt şi ce înseamnă numerele?*), el a expus serioase lacune în fundamentele logice ale sistemului numerelor reale. Nimeni nu demonstrase cu adevărat că numerele reale există.

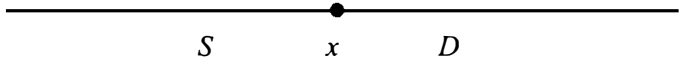
Nimeni nu demonstrase cu adevărat că numerele reale există.

El a propus şi o cale de a umple aceste lacune, folosind ceea ce numim azi *tăieturile lui Dedekind*. Ideea era de a porni de la un sistem numeric bine stabilit, numerele raționale, şi de a extinde apoi acest sistem pentru a obține sistemul

mai bogat al numerelor reale. El a plecat de la proprietățile cerute numerelor reale, a găsit o cale de a le reformula doar în termeni de numere raționale, iar apoi a inversat procedura, interpretând acele trăsături ale numerelor raționale ca definiție a numerelor reale. Acest tip de elaborare a unor noi concepte din cele vechi, pe cale inversă, a fost larg folosit de atunci.

Să presupunem pentru moment că numerele reale există. Cum se leagă ele de numerele raționale? Unele numere reale nu sunt raționale, un exemplu evident fiind $\sqrt{2}$. Deşi nu e o fracție exactă, el poate fi aproximat oricât de bine dorim prin numere raționale. El se află oarecum într-o poziție particulară, prins în densa rețea a tuturor numerelor raționale posibile. Dar cum putem preciza această poziție? Dedekind a înțeles că $\sqrt{2}$ separă mulțimea numerelor raționale în două submulțimi: cele care sunt mai mici decât $\sqrt{2}$ şi cele care sunt mai mari. Într-un fel, această separare – sau tăietură – definește numărul $\sqrt{2}$ în termeni de numere raționale. Singurul neajuns este că îl folosim pe $\sqrt{2}$ pentru a defini cele două submulțimi ale tăieturii. Există însă o ieşire din impas. Numerele raționale mai mari decât $\sqrt{2}$ sunt exact cele care sunt pozitive şi al căror pătrat e mai mare decât 2. Numerele raționale mai mici decât $\sqrt{2}$ sunt toate celelalte. Aceste două mulțimi de numere raționale sunt definite acum fără a-l folosi *explicit* pe $\sqrt{2}$, dar ele stabilesc cu precizie poziția lui pe dreapta numerelor reale.

Dedekind a arătat că dacă presupunem că numerele reale există, atunci o tăietură satisfăcând aceste două proprietăți poate fi asociată oricărui număr real, formând două mulțimi: mulțimea D a tuturor numerelor raționale care sunt mai mari decât acest număr real şi mulțimea S a tuturor numerelor raționale care sunt mai mici decât acest număr real, sau egale cu el. (Ultima condiție e necesară pentru a asocia o tăietură fiecărui număr *rațional*. Nu vrem să le excludem pe acestea din urmă.) Aici S şi D pot fi citite ca stânga şi dreapta în imaginea obişnuită a axei numerelor reale.



Aceste două mulțimi S şi D satisfac condiții riguroase. În primul rând, orice număr rațional aparține exact uneia din ele. În al doilea rând, orice număr din D e mai mare decât orice număr din S. În fine, există o condiție tehnică impusă numerelor raționale înseşi: S poate să aibă sau să nu aibă un cel mai mare membru, dar D nu are niciodată un cel mai mic membru. Orice pereche de submulțimi ale mulțimii numerelor raționale satisfăcând aceste proprietăți se numeşte o *tăietură.*

Inversând lucrurile, nu e nevoie să presupunem că numerele reale există, ci putem folosi tăieturile pentru a *defini* numerele reale, aşa încât un număr real e efectiv o tăietură. De obicei noi nu concepem un număr real în acest mod, dar Dedekind a înţeles că, dacă vrem, o putem face. Principala sarcină e de a defini adunarea şi înmulţirea tăieturilor, aşa încât aritmetica numerelor reale să aibă sens. Aceasta se dovedeşte a fi uşor de îndeplinit. Pentru a aduna două tăieturi (S_1, D_1) şi (S_2, D_2), fie $S_1 + S_2$ mulţimea tuturor numerelor care pot fi obţinute adunând un număr din S_1 cu un număr din S_2 şi fie $D_1 + D_2$ definită analog. Atunci suma celor două tăieturi este tăietura $(S_1 + S_2, D_1 + D_2)$. Înmulţirea se defineşte analog, dar numerele pozitive şi negative se comportă uşor diferit.

În fine, avem de verificat dacă aritmetica tăieturilor are toate însuşirile pe care le aşteptăm de la numerele reale. Între acestea sunt legile standard ale algebrei, care decurg toate din însuşirile analoge ale numerelor raţionale. Însuşirea esenţială care deosebeşte numerele reale de cele raţionale este că limita unui şir infinit de tăieturi există (în anumite condiţii tehnice). Echivalent, există câte o tăietură corespunzând oricărei dezvoltări zecimale. Lucrul acesta se vede şi el destul de uşor.

Presupunând că toate acestea pot fi făcute, să vedem cum demonstrează Dedekind că $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$. Am văzut că $\sqrt{2}$ corespunde tăieturii (S_1, D_1), unde D_1 constă din toate numerele raţionale pozitive al căror pătrat e mai mare decât 2. Analog, $\sqrt{3}$ corespunde tăieturii (S_2, D_2), unde D_2 constă din toate numerele raţionale pozitive al căror pătrat e mai mare decât 3. Produsul acestor tăieturi se arată uşor că e (S_3, D_3), unde D_3 constă din toate numerele raţionale pozitive al căror pătrat e mai mare decât 6. Dar aceasta e tăietura care-i corespunde lui $\sqrt{6}$. Q.e.d.!

Frumuseţea abordării lui Dedekind este că ea reduce toate chestiunile legate de numere reale la chestiunile corespunzătoare legate de numere raţionale – mai exact, de *perechi* de numere raţionale. De aceea ea defineşte numerele reale doar pe baza numerelor raţionale şi a operaţiilor cu aceste numere. Rezultatul este că numerele reale există (în sens matematic) cu condiţia să existe numerele raţionale.

Trebuie plătit un mic preţ: un număr real e definit acum ca o pereche de mulţimi de numere raţionale, ceea ce nu e modul nostru obişnuit de a privi numerele reale. Dacă vi se pare straniu, aduceţi-vă aminte că reprezentarea uzuală a unui număr real cu o infinitate de zecimale necesită un şir infinit de cifre zecimale 0–9. Conceptual, aceasta e cel puţin la fel de complicată ca o tăietură a lui Dedekind. De fapt e foarte dificil de definit suma sau produsul a două numere cu o infinitate de zecimale, deoarece metodele aritmetice obişnuite

de adunare şi înmulţire a zecimalelor pornesc de la capătul din dreapta – iar când şirul zecimalelor e infinit nu există un capăt din dreapta.

Axiomele numerelor întregi

Cartea lui Dedekind a fost un foarte bun exerciţiu de început, dar când definirea termenilor a devenit o preocupare generală, matematicienii au înţeles că ea n-a făcut decât să abată atenţia de la numerele reale la numerele raţionale. De unde ştim că există numere *raţionale*? Ei bine, dacă presupunem că există numerele întregi, atunci e simplu: definim un număr raţional p/q ca o pereche de numere întregi (p, q) şi deducem de aici formulele pentru sume şi produse. Dacă întregii există, atunci există şi perechile de întregi.

Dacă întregii există, atunci există şi perechile de întregi. Da, dar de unde ştim că întregii există?

Da, dar de unde ştim că întregii există? Dincolo de un semn plus sau minus, întregii sunt „numerele naturale“ 0, 1, 2, 3... E simplu să operăm cu semnele. Aşadar, întregii există cu condiţia să existe numerele naturale.

Cu toate acestea, încă n-am terminat. Suntem atât de familiarizaţi cu întregii pozitivi, încât nu ne trece niciodată prin minte să întrebăm dacă numerele obişnuite 0, 1, 2, 3... există cu adevărat. Iar dacă există, *ce sunt* ele de fapt?

În 1889, Giuseppe Peano a evitat întrebarea privind existenţa urmând pilda lui Euclid. În loc să discute existenţa punctelor, dreptelor, triunghiurilor etc., Euclid a scris pur şi simplu o listă de axiome – proprietăţi care erau presupuse fără alte întrebări. N-are rost să ne mai întrebăm dacă punctele şi toate celelalte există – o întrebare mai interesantă este: dacă ar exista, ce proprietăţi ar trebui să aibă? Peano a scris deci o listă de axiome ale numerelor naturale. Cele mai importante proprietăţi erau:

- Există un număr 0.
- Orice număr n are un succesor $s(n)$ (pe care-l privim ca pe $n+1$).
- Dacă $P(n)$ este o proprietate a numerelor, aşa încât $P(0)$ este adevărată, iar ori de câte ori $P(n)$ este adevărată, e adevărată şi $P(s(n))$, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice n (principiul inducţiei matematice).

El a definit apoi numerele 1, 2 etc. cu ajutorul acestor axiome, considerând

$$1 = s(0)$$

$$2 = s(s(0))$$

etc. şi a definit de asemenea operaţiile fundamentale ale aritmeticii, demonstrând că ele satisfac legile obişnuite. În sistemul lui, 2 + 2 = 4 e o teoremă demonstrabilă, enunţată ca s(s(0)) +s(s(0)) = s(s(s(s(0)))).

Un mare avantaj al acestei abordări axiomatice este că ea stabileşte exact ce avem de făcut dacă vrem să demonstrăm că numerele naturale există. Nu avem decât să construim un sistem care să satisfacă toate axiomele lui Peano.

Problema profundă aici este semnificaţia lui „există" în matematică. În lumea reală, ceva există dacă poate fi observat sau dacă prezenţa lui necesară poate fi dedusă din lucruri care *pot* fi observate. Ştim că există gravitaţie pentru că îi putem observa efectele, chiar dacă nimeni nu poate *vedea* gravitaţia. Prin urmare, în lumea reală, are sens să vorbim de existenţa a două pisici, a două biciclete sau a două felii de pâine. Dar numărul doi nu e la fel. Nu e un lucru, ci un construct conceptual. Nu întâlnim niciodată numărul doi în lumea reală. Tot ce putem obţine e un simbol, 2, scris sau tipărit pe hârtie, sau afişat pe ecranul unui calculator. Dar nimeni nu-şi închipuie că un simbol e totuna cu lucrul pe care-l reprezintă. Cuvântul „pisică" scris cu cerneală nu e o pisică. La fel, simbolul 2 nu e numărul doi.

Semnificaţia noţiunii de număr e o problemă conceptuală şi filozofică surprinzător de dificilă. Ea devine încă şi mai frustrantă din moment ce noi toţi ştim la perfecţie să folosim numerele. Ştim cum se comportă ele, dar nu ştim ce sunt.

Mulţimi şi clase

În anii 1880 Gottlob Frege a încercat să rezolve această problemă conceptuală construind numerele naturale din obiecte încă mai simple – mulţimi sau clase, cum le numea el. Punctul lui de pornire a fost asocierea numerelor cu operaţia de numărare. După Frege, doi este o proprietate a acelor mulţimi – şi numai a lor – care pot fi puse în corespondenţă biunivocă cu o mulţime standard $\{a, b\}$ având membri diferiţi a şi b. Aşadar

{o pisică, altă pisică}
{o bicicletă, altă bicicletă}
{o felie, altă felie}

pot fi toate puse în corespondenţă cu $\{a, b\}$, deci ele toate determină acelaşi număr – indiferent ce înseamnă asta.

Din păcate, folosirea unei liste de mulţimi standard drept numere pare să fie o *petitio principii* – e ca şi cum ai confunda un simbol cu ceea ce reprezintă el.

Dar cum putem caracteriza „o proprietate a acelor mulțimi care pot fi puse în corespondență biunivocă cu o mulțime standard"? Ce este o proprietate? Frege a avut o idee minunată. Există o mulțime bine definită asociată oricărei proprietăți: mulțimea constând din tot ce posedă acea proprietate. Proprietatea de „prim" e asociată cu mulțimea *tuturor* numerelor prime, proprietatea de „isoscel" e asociată cu mulțimea *tuturor* triunghiurilor isoscele ș.a.m.d.

Așadar, Frege a propus ca numărul 2 să fie mulțimea conținând *toate* mulțimile care pot fi puse în corespondență biunivocă cu mulțimea standard $\{a, b\}$. Mai general, un *număr* e mulțimea tuturor mulțimilor care pot fi puse în corespondență biunivocă cu o mulțime dată. Astfel, de exemplu, numărul 3 este mulțimea

$\{\ldots\{a, b, c\}, \{$o pisică, altă pisică, încă o altă pisică$\}, \{X, Y, Z\}\ldots\}$

deși probabil ar fi mai bine să folosim obiecte matematice în loc de pisici sau litere.

Pe această cale Frege a descoperit că putea așeza pe o bază logică întreaga aritmetică a numerelor naturale. Ea se reducea la proprietăți evidente ale mulțimilor. A scris toate acestea în capodopera sa *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Bazele aritmeticii*) apărută în 1884, dar spre amara sa dezamăgire Georg Cantor, un reputat specialist în logica matematică, a considerat cartea lipsită de valoare. Refuzând să se dea bătut, Frege a publicat în 1893 primul volum al unei alte cărți, *Die Grundgesetze der Arithmetik* (*Legile fundamentale ale aritmeticii*), în care propunea un sistem intuitiv plauzibil de axiome pentru aritmetică. Peano a recenzat cartea, iar toți ceilalți au ignorat-o. Zece ani mai târziu, Frege era în sfârșit gata să publice volumul al doilea, deși observase un neajuns fundamental al axiomelor sale, neajuns remarcat și de alții. Pe când volumul al doilea se afla sub tipar s-a produs nenorocirea. Frege a primit o scrisoare de la filozoful-matematician Bertrand Russell, căruia îi trimisese șpalturile cărții. Scrisoare spunea în esență următoarele: „Dragă Gottlob, gândește-te la mulțimea tuturor mulțimilor care nu sunt membre ale lor însele. Al dumitale, Bertrand."

Frege era un excelent logician și a priceput imediat ce voia să spună Russel – de fapt era conștient că puteau apărea neplăceri. Frege presupusese, fără demonstrație, că orice proprietate rezonabilă definea o mulțime alcătuită din obiectele care posedă acea proprietate. Dar aici era o proprietate aparent rezonabilă, „a nu fi membră a ei însăși", care în mod evident *nu* corespundea vreunei mulțimi.

Plin de amărăciune, Frege a scris o anexă la acel *opus magnum*, discutând obiecția lui Russell. A găsit o soluție de avarie: să elimine din împărăția

PARADOXUL LUI RUSSELL

O versiune mai puţin formală a paradoxului propus de Russell este cea privind bărbierul satului care îi bărbiereşte pe toţi cei care nu se bărbieresc ei înşişi. Cine-l bărbiereşte pe bărbier? Dacă se bărbiereşte pe sine, atunci prin definiţie e bărbierit de bărbierul satului – el însuşi! Dacă nu se bărbiereşte pe sine, atunci e bărbierit de bărbier – care, din nou, este el însuşi.

Lăsând la o parte diverse subterfugii – bărbierul e o femeie, de pildă – singura concluzie posibilă este că nu există un asemenea bărbier. Russell a reformulat acest paradox în termeni de mulţimi. Fie mulţimea X formată din toate mulţimile care nu sunt membre ale lor însele. Este X membră a ei însăşi sau nu? Dacă nu e, atunci prin definiţie îi aparţine lui X – ea însăşi. Dacă e membră a ei însăşi, atunci, ca orice membru al lui X, nu e membră a ei însăşi. Astfel, X este membră a ei însăşi dacă nu este şi nu este membră a ei însăşi dacă este. De data aceasta nu există nici o scăpare – în universul matematic nu există deocamdată mulţimi feminine.

mulţimilor orice mulţime care e membră a ei însăşi. Dar n-a fost niciodată cu adevărat mulţumit de această propunere.

Russell a încercat să umple lacuna din construcţia numerelor naturale pornind de la mulţimi, iniţiată de Frege. Ideea lui a fost să limiteze tipul de proprietate care putea fi folosită pentru a defini o mulţime. Trebuia bineînţeles să găsească o demonstraţie a faptului că acest tip restrâns de proprietate nu conducea la un paradox. Împreună cu Alfred North Whitehead a reuşit să construiască o complicată *teorie a tipurilor* care îndeplinea această condiţie. Ei au publicat între 1910 şi 1913 trei volume masive intitulate *Principia Mathematica*. Definiţia numărului 2 este aproape de finele volumului întâi, iar teorema 1 + 1 = 2 e demonstrată la pagina 86 a volumului doi. Cu toate acestea, *Principia Mathematica* nu a pus capăt dezbaterii asupra fundamentelor. Teoria tipurilor a fost ea însăşi controversată. Matematicienii îşi doreau ceva mai simplu şi mai intuitiv.

Cantor

Aceste analize privind rolul fundamental al numărării în definirea noţiunii de număr au condus la una dintre cele mai îndrăzneţe descoperiri din întreaga matematică: teoria lui Cantor asupra *numerelor transfinite* – diferitele mărimi ale infinitului.

Infinitul, în diverse ipostaze, pare inevitabil în matematică. Nu există un cel mai mare număr natural – deoarece adăugând unu obținem întotdeauna un număr și mai mare –, așa încât există o infinitate de numere naturale. Geometria lui Euclid se defășoară pe un plan infinit, iar el a demonstrat că există o infinitate de numere prime. Ca un preambul la calculul diferențial, mai mulți matematicieni, între care Arhimede, au privit aria sau volumul ca pe o sumă infinită de felii infinit de subțiri. După apariția analizei matematice, aceeași imagine a ariilor și volumelor a fost folosită în scopuri euristice, chiar dacă demonstrațiile au luat o altă formă.

Aceste apariții ale infinitului puteau fi reformulate în termeni finiți pentru a evita tot soiul de dificultăți filozofice. În loc să spunem „există o infinitate de numere naturale", de pildă, putem spune „nu există un cel mai mare număr natural". A doua formulare evită menționarea explicită a infinitului, deși e echivalentă cu prima. În esență, infinitul e privit aici ca un proces care poate continua fără a-i impune o limită, dar nu e efectiv *încheiat*. Filozofii numesc acest tip de infinit *infinit potențial*. Spre deosebire de el, folosirea explicită a infinitului ca obiect matematic de sine stătător reprezintă *infinitul actual*.

Matematicienii dinaintea lui Cantor observaseră că infiniții actuali au proprietăți paradoxale. În 1632, Galilei a scris *Dialogul asupra celor două principale sisteme ale lumii*, în care două personaje fictive, versatul Salviati și istețul profan Sagredo, discută cauzele mareelor, din perspectivă geocentrică și heliocentrică. Orice mențiune a mareelor a fost îndepărtată la cererea autorităților bisericești, transformând cartea într-un exercițiu ipotetic care însă pledează din plin în favoarea teoriei lui Copernic. Cele două personaje ajung să discute unele dintre paradoxurile infinitului. Sagredo întreabă „Există oare mai multe numere decât pătrate?" și susține că, din moment ce majoritatea numerelor naturale nu sunt pătrate perfecte, răspunsul trebuie să fie afirmativ. Salviati răspunde că orice număr poate fi pus în mod unic în corespondență cu pătratul său:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	4	9	16	25	36	49

Așadar, numărul numerelor naturale trebuie să fie același cu cel al pătratelor perfecte, deci răspunsul este negativ.

Cantor a rezolvat această dificultate observând că în dialog termenul „mai multe" e folosit în două sensuri diferite. Sagredo susține că mulțimea pătratelor

perfecte e o submulțime a mulțimii tuturor numerelor naturale. Poziția lui Salviati e mai subtilă: el arată că există o corespondență biunivocă între mulțimea tuturor pătratelor perfecte și mulțimea tuturor numerelor naturale. Acestea sunt două afirmații diferite, iar ambele pot fi adevărate, fără a duce la vreo contradicție.

Ducând mai departe aceste idei, Cantor a inventat o aritmetică a infinitului, care explica paradoxurile anterioare introducând unele noi. Aceasta făcea parte dintr-un program mai vast, așa-numita *Mengenlehre*, teoria matematică a mulțimilor (*Menge* înseamnă în germană *mulțime* sau *ansamblu*). Cantor a început să se gândească la mulțimi din cauza unor probleme dificile de analiză Fourier, deci ideile sale proveneau din teorii matematice convenționale. Dar răspunsurile descoperite de el erau atât de stranii, încât mulți matematicieni ai epocii le-au respins fără să ezite. Alții însă le-au recunoscut valoarea. Între ei, David Hilbert, care spunea: „Nimeni nu ne va izgoni din paradisul creat de Cantor."

Mărimea mulțimilor

Punctul de plecare al lui Cantor a fost conceptul naiv de *mulțime*, care e o colecție de obiecte, elementele sale. Un mod de a preciza o mulțime este să-i enumeri elementele, folosind acoladele. De pildă, mulțimea tuturor numerelor naturale cuprinse între 1 și 6 se scrie

$$\{1, 2, 3, 4, 5,6\}$$

Pe de altă parte, o mulțime poate fi precizată dând regula de apartenență:

$$\{n : 1 \leq n \leq 6 \text{ și } n \text{ este un număr natural}\}$$

Mulțimile specificate mai sus sunt identice. Prima notație e limitată la mulțimi finite, pe când a doua nu are asemenea limitări. Prin urmare, mulțimile

$$\{n : n \text{ este un număr natural}\}$$

și

$$\{n : n \text{ este un pătrat perfect}\}$$

sunt ambele bine precizate și ambele infinite.

Unul dintre cele mai simple lucruri pe care le putem face cu o mulțime este să-i numărăm elementele. Cât de mare e ea? Mulțimea {1, 2, 3, 4, 5, 6} are șase elemente, la fel ca mulțimea {1, 4, 9, 16, 25, 36} constând din pătratele corespunzătoare. Atunci, *cardinalitatea* acestor mulțimi este 6, iar 6 este numărul lor *cardinal*. (Există și o altă noțiune, cea de număr ordinal, asociată

cu aşezarea numerelor într-o anumită ordine, deci adjectivul „cardinal" nu e superfluu aici.) Mulţimea tuturor numerelor naturale nu poate fi numărată în acest mod, dar Cantor a observat că putem totuşi stabili o corespondenţă biunivocă între ea şi mulţimea tuturor pătratelor perfecte, folosind aceeaşi schemă ca Galilei. Fiecărui număr natural îi corespunde pătratul său.

Conform definiţiei lui Cantor, două mulţimi sunt *echipotente* dacă între ele există o corespondenţă biunivocă. Dacă mulţimile sunt finite, această condiţie este echivalentă cu cea de „a avea acelaşi număr de elemente". Dar, dacă mulţimile sunt infinite, deşi pare să nu aibă sens să vorbim despre numărul elementelor, noţiunea de echipotenţă are sens. Cantor a mers şi mai departe. A introdus un sistem de *numere transfinite*, sau *cardinale infinite*, care îi permitea să spună câte elemente are o mulţime. În plus, două mulţimi erau echipotente dacă şi numai dacă ele aveau acelaşi număr de elemente – acelaşi cardinal.

Punctul de pornire a fost un nou tip de număr, pe care el l-a notat $\aleph_0$. Aceasta e litera ebraică alef cu indicele zero şi se citeşte „alef-zero". Acest număr este prin definţie cardinalul mulţimii tuturor numerelor naturale. Din condiţia ca două mulţimi echipotente să aibă acelaşi cardinal, Cantor a dedus că orice mulţime care poate fi pusă într-o corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale are de asemenea cardinalul $\aleph_0$. De exemplu, mulţimea tuturor pătratelor perfecte are cardinalul $\aleph_0$. La fel şi mulţimea numerelor pare:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	4	6	8	10	12	14

precum şi mulţimea numerelor impare:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	3	5	7	9	11	13

Din aceste definiţii rezultă că o mulţime mai mică poate avea acelaşi cardinal ca una mai mare, ceea ce nu e cotradictoriu, iar Cantor a considerat că e o consecinţă firească a abordării sale şi un preţ care merita plătit. Trebuie doar să fii atent şi să nu presupui că numerele transfinite se comportă la fel ca cele finite. Ele nu sunt finite!

Există oare mai multe numere întregi (pozitive şi negative) decât numere naturale? Nu, deoarece putem pune în corespondenţă cele două mulţimi în felul următor:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	–1	2	–2	3	–3

Aritmetica acestor cardinale infinite este şi ea stranie. De pildă, tocmai am văzut că mulţimea numerelor pare şi cea a numerelor impare au cardinalul $\aleph_0$. Cum aceste mulţimi nu au elemente comune, cardinalul reuniunii lor – mulţimea obţinută dacă le reunim – ar trebui să fie, prin analogie cu mulţimile finite, $\aleph_0 + \aleph_0$. Dar ştim ce este reuniunea lor: mulţimea numerelor naturale, cu cardinalul $\aleph_0$. Prin urmare, ar trebui să deducem că

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Şi aşa şi este. Dar, din nou, nu există nici o contradicţie aici: nu putem împărţi cu $\aleph_0$, pentru a deduce că 1 + 1 = 1, deoarece $\aleph_0$ nu e un număr, iar împărţirea n-a fost definită şi nici nu s-a demonstrat măcar că ar avea sens. Într-adevăr, această egalitate arată că împărţirea cu $\aleph_0$ nu are întotdeauna sens. Din nou, acceptăm că acesta e preţul progresului.

Toate bune şi frumoase, dar $\aleph_0$ pare să fie doar un alt simbol în locul vechiului ∞ şi să nu spună nimic nou. Nu cumva *toate* mulţimile infinite au cardinalul $\aleph_0$? Doar toţi infiniţii sunt egali între ei, nu-i aşa?

Un candidat pentru un cardinal infinit mai mare decât $\aleph_0$ – adică o mulţime infinită care să nu poată fi pusă într-o corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale – este mulţimea numerelor raţionale, notată de regulă prin Q. La urma urmelor, există infinit de multe numere raţionale în intervalul dintre orice doi întregi consecutivi, iar genul de stratagemă folosită cu numerele negative nu mai funcţionează.

În 1873 Cantor a demonstrat însă că mulţimea numerelor raţionale are tot cardinalul $\aleph_0$. Corespondenţa biunivocă amestecă destul de tare numerele, dar nimeni n-a spus că ele trebuiau să rămână în ordine crescătoare. Se părea că orice mulţime infinită avea cardinalul $\aleph_0$.

În acelaşi an, Cantor a făcut un pas decisiv înainte. El a demonstrat că mulţimea R a tuturor numerelor reale nu are cardinalul $\aleph_0$, o teoremă uimitoare pe care a publicat-o în 1874. Aşadar, şi în sensul particular al lui Cantor, există mai multe numere reale decât întregi. Un infinit poate fi mai mare decât altul.

Cât de mare este cardinalul numerelor reale? Cantor spera ca el să fie $\aleph_1$, următorul cardinal ca mărime după $\aleph_0$. Dar nu a reuşit să demonstreze acest lucru, aşa încât a numit noul cardinal c, de la continuum. Egalitatea sperată

$c = \aleph_1$ a fost numită ipoteza continuumului. Abia în 1960 au descifrat matematicienii raportul dintre c şi $\aleph_1$, când Paul Cohen a demonstrat că răspunsul depinde de axiomele pe care le alegem pentru teoria mulţimilor. Cu anumite axiome rezonabile, cele două cardinale coincid. Dar cu alte axiome, la fel de rezonabile, ele sunt diferite.

Deşi valabilitatea egalităţii $c = \aleph_1$ depinde de axiomele alese, o anumită egalitate asociată nu depinde de ele. Aceasta este $c = 2^{\aleph_0}$. Pentru orice cardinal A putem defini 2^A drept cardinalul mulţimii tuturor submulţimilor lui A. Şi putem demonstra foarte uşor că 2^A este întotdeauna mai mare decât A. Asta înseamnă nu numai că anumiţi infiniţi sunt mai mari decât alţii, ci şi că nu există un cel mai mare număr cardinal.

Contradicţiile

Cea mai importantă sarcină a fundamentării matematicii nu era însă de a demonstra existenţa conceptelor matematice, ci de a demonstra că matematica e logic coerentă. După câte ştiau matematicienii – şi după câte ştiu şi azi –, putea exista un şir de paşi logici, fiecare dintre ei perfect corect, conducând la o concluzie absurdă. Cineva ar putea de pildă demonstra că $2 + 2 = 5$ sau că $1 = 0$. Sau că 6 e prim, sau că $\pi = 3$.

S-ar părea că o contradicţie minusculă ar avea consecinţe limitate. În viaţa de zi cu zi, oamenii operează deseori cu succes într-un cadru contradictoriu, afirmând la un moment dat, să zicem, că încălzirea globală distruge planeta, iar o clipă mai târziu că liniile aeriene ieftine sunt o mare invenţie. În matematică însă, asemenea consecinţe nu sunt limitate, şi nu putem scăpa de contradicţiile logice ignorându-le. În matematică, odată ce ai demonstrat un lucru, îl poţi folosi în alte demonstraţii. Dacă ai demonstrat că $0 = 1$, de aici rezultă lucruri mult mai neplăcute. De pildă, toate numerele sunt egale între ele. Căci dacă x e un număr oarecare, plecând de la $0 = 1$ şi înmulţind ambele părţi ale acestei egalităţi cu x, obţinem $0 = x$. Analog, dacă y e orice alt număr, $0 = y$. Dar atunci $x = y$.

Mai rău, metoda standard de demonstraţie prin reducere la absurd înseamnă că orice poate fi demonstrat odată ce am demonstrat că $0 = 1$. Pentru a demonstra Marea Teoremă a lui Fermat, raţionăm astfel:

Presupunem că Marea Teoremă a lui Fermat e falsă.

Atunci $0 = 1$.

Contradicţie.

Deci Marea Teoremă a lui Fermat este adevărată.

Pe lângă faptul că e nesatisfăcătoare, metoda aceasta demonstrează şi că Marea Teoremă a lui Fermat este falsă:

Presupunem că Marea Teoremă a lui Fermat e adevărată.

Atunci 0 = 1.

Contradicţie.

Deci Marea Teoremă a lui Fermat e falsă.

Dacă totul e adevărat – şi în acelaşi timp fals –, nimic cu sens nu mai poate fi spus. Întreaga matematică devine un joc stupid, lipsit de conţinut.

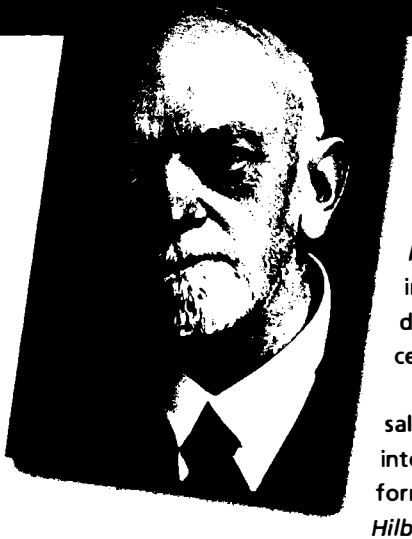
Hilbert

Următoarea contribuţie legată de fundamente i s-a datorat lui David Hilbert, probabil cel mai influent matematician al epocii sale. Hilbert obişnuia să lucreze într-un domeniu al matematicii timp de vreo zece ani, rezolvând principalele probleme, iar apoi se muta într-un nou domeniu. El era convins că trebuia să poată fi demonstrat că matematica nu conduce niciodată la contradicţii logice. Hilbert a înţeles şi faptul că intuiţia din fizică nu ajută cu nimic aici. Dacă matematica e contradictorie, trebuie să se poată demonstra că 0 = 1, iar atunci există o interpretare fizică: 0 vaci = 1 vacă, deci vacile pot dispărea într-un nor de fum. Acest lucru pare improbabil. Nu există totuşi nici o garanţie că matematica numerelor naturale se potriveşte cu fizica vacilor, şi nu e chiar de neconceput ca o vacă să dispară brusc. (În mecanica cuantică, asta se poate întâmpla, dar cu o probabilitate foarte mică.) Într-univers finit există o limită pentru numărul vacilor, dar nu există nici o limită pentru numerele întregi. Intuiţia fizică poate induce deci în eroare, şi trebuie ignorată.

Hilbert a ajuns la această concluzie în cercetările sale privind bazele axiomatice ale geometriei lui Euclid. El a descoperit lacune logice în sistemul de axiome al lui Euclid şi a înţeles că ele au apărut deoarece Euclid fusese indus în eroare de imaginile vizuale. Întrucât ştia că o dreaptă e un obiect lung şi îngust, că un cerc e rotund sau că punctul n-are dimensiuni, acceptase din neatenţie anumite proprietăţi fără a le enunţa ca axiome. După mai multe încercări, Hilbert a propus un sistem de 21 de axiome şi a prezentat rolul lor în *Grundlagen der Geometrie* (*Bazele geometriei*), publicată în 1899.

Hilbert susţinea că o deducţie logică trebuie să fie corectă indiferent de interpretarea care-i este impusă. Orice proprietate care se bazează pe o interpretare particulară a axiomelor, dar e falsă într-o altă interpretare, implică

David Hilbert
1862–1943



David Hilbert a absolvit Universitatea din Königsberg în 1885 cu o teză asupra teoriei invarianților. A predat la această universitate până când a obținut o catedră la Göttingen în 1895. A continuat să lucreze la teoria invarianților, demonstrând teorema bazei finite în 1888. Metodele lui erau mai abstracte decât se obișnuia pe vremea sa, iar Paul Gordan, una dintre personalitățile domeniului, a considerat lucrarea lui nesatisfăcătoare. Hilbert și-a revizuit articolul pentru a fi publicat în *Mathematische Annalen*, iar Klein l-a considerat „cea mai importantă lucrare de algebră generală pe care [revista] a publicat-o vreodată".

În 1893 a început o amplă dare de seamă asupra teoriei numerelor, *Zahlbericht*. Deși intenționa să rezume cunoștințele de la acea dată, Hilbert a introdus importante contribuții originale, ceea ce numim azi teoria corpului claselor.

Pe la 1889 și-a schimbat din nou domeniul, studiind acum fundamentele axiomatice ale geometriei euclidiene. În 1900, la Al Doilea Congres Internațional al Matematicienilor de la Paris, a prezentat o listă de 23 de mari probleme nerezolvate. Aceste *Probleme ale lui Hilbert* au avut un impact enorm asupra direcției ulterioare a cercetării matematice.

În 1909 cercetările sale asupra ecuațiilor integrale au condus la formalizarea *spațiilor Hilbert*, fundamentale astăzi în mecanica cuantică. A fost de asemenea foarte aproape de a descoperi ecuațiile lui Einstein pentru relativitatea generală într-un articol din 1915. Când articolul era sub tipar, a adăugat o notă afirmând că acesta era în acord cu ecuațiile lui Einstein, ceea ce a făcut să se creadă în mod greșit că Hilbert ar fi anticipat ecuațiile lui Einstein.

În 1930, cu ocazia pensionării, Hilbert a fost făcut cetățean de onoare al Königsbergului. Discursul său cu acest prilej s-a încheiat astfel: „Wir müssen wissen, wir werden wissen" (trebuie să știm și vom ști), cuvinte care sintetizau credința lui în puterea matematicii și hotărârea de a rezolva chiar și cele mai dificile probleme.

o eroare logică. Această perspectivă privind axiomatica, mai mult decât aplicarea ei la geometrie, e contribuția principală a lui Hilbert la fundamentarea matematicii. Aceeași perspectivă a influențat și conținutul matematicii, făcând să devină mult mai ușor – și mai respectabil – să inventezi noi concepte prin

enumerarea axiomelor lor. De aici a venit o mare parte din tendința spre abstractizare de la începutul secolului XX.

Se spune deseori că Hilbert ar fi susținut că matematica e un joc fără semnificație jucat cu simboluri, ceea ce e o denaturare a ideilor lui. El credea că pentru a așeza domeniul pe o bază logică solidă trebuia să-l privești *ca și cum* ar fi un joc fără semnificație jucat cu simboluri. Tot restul e irelevant pentru structura logică. Dar nici un om care cunoaște bine descoperirile matematice ale lui Hilbert și profunda lui dăruire față de domeniu nu poate deduce că el și-ar fi închipuit că joacă un joc fără semnificație.

După succesul său din geometrie, Hilbert a început să se gândească la un proiect mult mai ambițios.

După succesul său din geometrie, Hilbert a început să se gândească la un proiect mult mai ambițios: acela de a așeza întreaga matematică pe o bază logică solidă. El a urmărit îndeaproape cercetările celor mai mari logicieni și a elaborat un program explicit care să fundamenteze matematica o dată pentru totdeauna. Pe lângă demonstrarea faptului că matematica era necontradictorie, el mai credea și că în principiu toate problemele puteau fi rezolvate – orice propoziție matematică se putea demonstra fie că e adevărată, fie că e falsă. Câteva succese de început l-au convins că se afla pe drumul cel bun și că reușita nu era departe.

La ce i-a ajutat logica

Charles Lutwidge Dodgson, mai cunoscut sub numele de Lewis Carroll, a folosit propria formulare a unei ramuri a logicii matematice, numită azi calcul propozițional, pentru a enunța și rezolva preobleme de logică. Un exemplu tipic din cartea sa *Logică simbolică*, apărută în 1896, este:

- Toți cei care-l apreciază cu adevărat pe Beethoven păstrează tăcerea în timp ce se cântă *Sonata Lunii*.
- Porcii de Guineea sunt complet ignoranți în privința muzicii.
- Nimeni din cei complet ignoranți în privința muzicii nu păstrează tăcerea în timp ce se cântă *Sonata Lunii*.

Rezultă că nici un porc de Guineea nu-l apreciază cu adevărat pe Beethoven. Această formă de raționament logic se numește un silogism și provine din Grecia antică.

Gödel

Exista totuşi un logician care nu era convins de proiectul lui Hilbert de a demonstra că matematica e necontradictorie. Numele lui era Kurt Gödel, iar îndoielile sale privind programul lui Hilbert au schimbat pentru totdeauna perspectiva noastră asupra adevărului logic.

Înainte de Gödel, matematica era pur şi simplu considerată *adevărată* – iar acesta era exemplul suprem de adevăr, fiindcă adevărul unui enunţ precum 2 + 2 = 4 ţinea de domeniul gândirii pure, independent de lumea noastră fizică. Adevărurile matematice nu erau lucruri care să poată fi infirmate de experimente ulterioare. Prin aceasta ele erau superioare adevărurilor fizice, cum ar fi legea newtoniană a gravitaţiei invers proporţionale cu pătratul distanţei care a fost infirmată de observaţiile asupra periheliului lui Mercur, ceea ce venea în sprijinul noii teorii a lui Einstein.

După Gödel, adevărul matematic s-a dovedit a fi o iluzie. Existau, desigur, *demonstraţiile* matematice a căror logică internă putea foarte bine să fie fără fisuri, dar ele se aflau într-un cadru mai larg – matematica fundamentelor –, unde nu putea exista nici o garanţie că întregul joc ar avea vreo semnificaţie. Gödel nu s-a limitat să afirme acest lucru, el l-a demonstrat. De fapt, el a făcut două lucruri, care împreună au transformat în ruine programul optimist al lui Hilbert.

După Gödel, adevărul matematic s-a dovedit a fi o iluzie.

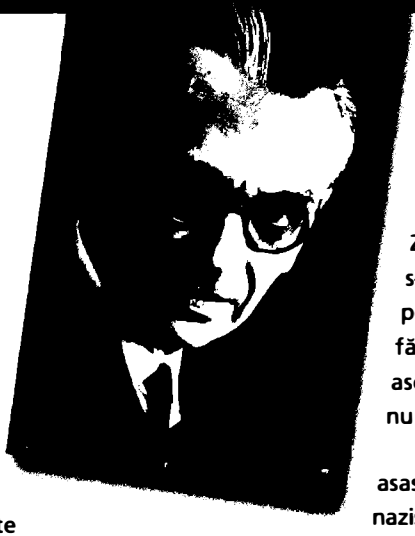
Gödel a demonstrat că, dacă matematica e logic necontradictorie, atunci lucrul acesta e imposibil de demonstrat. Nu numai că el n-a putut găsi o demonstraţie, dar *nu există* nici o demonstraţie. Aşa încât, dacă reuşeşti să demonstrezi că matematica e necontradictorie, rezultă imediat că e contradictorie. Gödel a mai demonstrat că anumite propoziţii matematice nu pot fi nici demonstrate, nici infirmate. Din nou, nu numai că el personal nu era în stare, dar lucrul e imposibil. Asemenea propoziţii se numesc *indecidabile*.

Iniţial, el a demonstrat aceste afirmaţii într-o formulare logică particulară a matematicii, cea adoptată de Russel şi Whitehead în *Principia Mathematica*. La început, Hilbert a crezut că putea exista o cale de ieşire: să găsească o fundamentare mai bună. Dar atunci când logicienii au studiat lucrarea lui Gödel s-a dovedit că aceleaşi idei rămân valabile în orice formulare logică a matematicii, suficient de puternică pentru exprima noţiunile elementare ale aritmeticii.

O consecinţă bizară a descoperirilor lui Gödel este că orice sistem axiomatic al matematicii trebuie să fie *incomplet*: nu poţi scrie o listă finită de axiome

Kurt Gödel

1906–1978



În 1923, când s-a dus la Universitatea din Viena, Gödel nu se hotărâse încă dacă să studieze matematica sau fizica. Decizia i-a fost influențată de cursurile unui matematician cu un handicap grav, Philipp Furtwängler (fratele celebrului dirijor și compozitor Wilhelm Furtwängler). Gödel însuși avea o sănătate fragilă, iar voința cu care Furtwängler își depășea handicapul l-a impresionat puternic. La un seminar condus de Moritz Schlick, Gödel a început să studieze cartea lui Russell *Introducere în filozofia matematică*, și a devenit clar că viitorul lui se afla în logica matematică.

În teza sa de doctorat din 1929 a demonstrat că un anumit sistem logic, calculul propozițional de ordinul întâi, este complet – orice teoremă adevărată poate fi demonstrată și orice teoremă falsă poate fi infirmată. Celebritatea i-a adus-o demonstrarea „Teoremelor de Incompletitudine ale lui Gödel". În 1931 Gödel și-a publicat *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (*Despre teoreme indecidabile din Principia Mathematica și din sistemele înrudite*) în care a demonstrat că nici un sistem de axiome suficient de bogat pentru a formaliza aritmetica nu poate fi logic complet. În 1931 și-a discutat rezultatele cu logicianul Ernst Zermelo, dar întâlnirea s-a terminat prost, poate fiindcă Zermelo făcuse deja descoperiri asemănătoare, dar nu le publicase.

În 1936 Schlick a fost asasinat de un student nazist, iar Gödel a avut o cădere psihică (era deja a doua). După ce și-a revenit, a vizitat Princetonul. În 1938, s-a căsătorit, împotriva dorinței mamei lui, cu Adele Porkert și s-a întors la Princeton, la puțină vreme după ce Austria fusese încorporată în Germania. După izbucnirea celui de-al Doilea Război Mondial, temându-se că ar putea fi chemat în armata germană, a emigrat în SUA, trecând prin Rusia și Japonia. În 1940 a publicat o a doua lucrare fundamentală – o demonstrație a faptului că ipoteza continuumului a lui Cantor nu contrazice axiomele obișnuite ale matematicii.

A devenit cetățean american în 1948 și și-a petrecut restul vieții la Princeton. Către sfârșitul vieții a început să se teamă tot mai mult pentru sănătatea sa, iar în cele din urmă s-a convins că cineva încerca să-l otrăvească. A refuzat să mai mănânce și a murit la spital. Până la sfârșit i-a plăcut să discute filozofie cu vizitatorii săi.

care să determine în mod unic toate teoremele adevărate sau false. Nu există scăpare – programul lui Hilbert era condamnat. Se spune că atunci când Hilbert a aflat de rezultatul lui Gödel s-a înfuriat foarte tare, dar probabil că s-a înfuriat pe sine, fiindcă ideea de bază a lui Gödel e foarte simplă. (Aplicarea tehnică a ideii e extrem de delicată, dar Hilbert nu avea dificultăți de ordin tehnic.) Poate că Hilbert şi-a dat seama că ar fi trebuit să prevadă apariția teoremelor lui Gödel.

Teoremele lui Gödel au schimbat modul nostru de a privi fundamentele matematicii.

Russell demolase cartea lui Frege cu un paradox logic, paradoxul bărbierului din sat care îi bărbierește pe toți cei ce nu se bărbieresc singuri: mulțimea tuturor mulțimilor care nu sunt membre ale lor însele. Gödel a demolat programul lui Hilbert cu un alt paradox logic, paradoxul celui care spune: afirmația aceasta este o minciună. Într-adevăr, propoziția indecidabilă a lui Gödel – pe care se bazează tot restul – este o teoremă T care spune: „Această teoremă nu poate fi demonstrată."

Dacă fiecare teoremă poate fi fie demonstrată, fie infirmată, atunci propoziția T a lui Gödel e în ambele cazuri contradictorie. Să presupunem că T poate fi demonstrată, atunci T spune că T nu poate fi demonstrată – contradicție. Pe de altă parte, dacă T poate fi infirmată, atunci afirmația T e falsă, deci e fals să afirmi că T nu poate fi demostrată. Prin urmare, T poate fi demonstrată – altă contradicție. Deci presupunerea că fiecare teoremă poate fi fie demonstrată, fie infirmată ne spune că T poate fi demonstrată dacă şi numai dacă ea nu poate fi demonstrată.

Unde ne aflăm azi

Teoremele lui Gödel au schimbat modul nostru de a privi fundamentele matematicii. Din ele rezultă că probleme deocamdată nerezolvate ar putea să nu aibă soluție – nu sunt nici adevărate, nici false, ci se află în purgatoriul indecidabilului. Şi multe probleme interesante s-au dovedit a fi indecidabile. Totuşi, efectul teoremelor lui Gödel nu s-a extins mult dincolo de domeniul fundamentelor de unde provin. Pe drept sau pe nedrept, matematicienii care lucrează la conjectura lui Poincaré sau la ipoteza lui Riemann caută confirmări sau infirmări ale acestora. Ei ştiu că problema poate fi indecidabilă, şi ar putea chiar căuta o demonstrație a indecidabilității dacă ar şti de unde să înceapă. Dar majoritatea problemelor indecidabile cunoscute au pentru ei o amprentă autoreferențială şi, în plus, o demonstrație a indecidabilității pare imposibilă.

Pe măsură ce matematica a construit teorii tot mai complicate bazate pe cele anterioare, suprastructura ei a început să se fisureze din cauza unor presupuneri

La ce ne ajută logica

O variantă a teoremei de incompletitudine a lui Gödel a fost descoperită de Alan Turing într-o analiză a calculelor ce pot fi efectuate, publicată în 1936 sub titlul *Despre numere calculabile, cu o aplicație la Entscheidungsproblem* (problema deciziei). Turing a început prin a formaliza un calcul algoritmic – unul care urmează o rețetă prestabilită – în termenii unei așa-numite mașini Turing. Aceasta e o idealizare matematică a unui dispozitiv care scrie conform anumitor reguli cifrele 0 sau 1 pe o bandă. El a demonstrat că problema opririi pentru mașinile Turing – se oprește oare calculul pentru anumite date de intrare? – e *indecidabilă*. Asta înseamnă că nu putem prezice dacă procesul de calcul se va opri sau nu.

Turing și-a demonstrat rezultatul presupunând că problema opririi e decidabilă și construind un calcul care se oprește dacă și numai dacă el nu se oprește, o contradicție. Rezultatul său demonstrează că există limite ale calculabilității. Unii filozofi au extins aceste idei pentru a determina limitele gândirii raționale, și s-a emis ipoteza că o minte conștientă nu poate funcționa algoritmic, dar deocamdată problema nu e tranșată. E naiv să credem că un creier funcționează ca un calculator modern, ceea ce nu înseamnă însă că un calculator nu poate simula un creier.

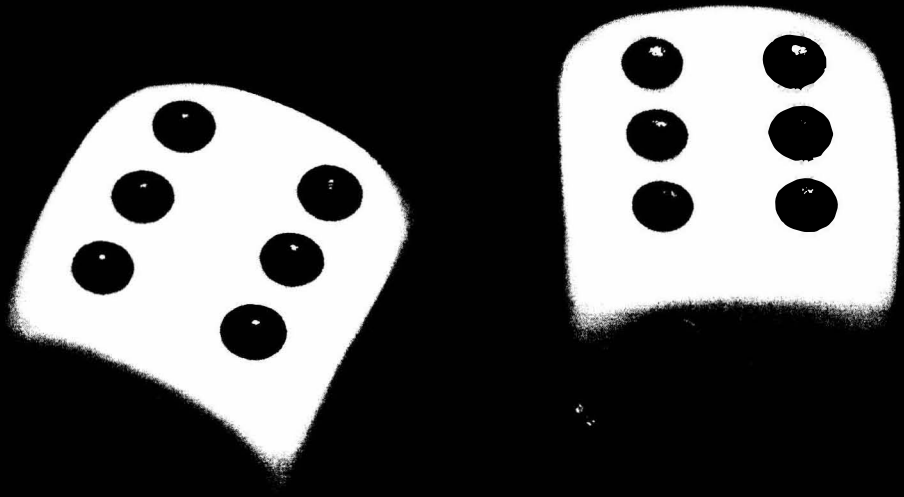
tacite care s-au dovedit a fi false. Pentru a reface întregul edificiu trebuia lucrat la temelia lui.

Cercetările care au urmat s-au concentrat asupra naturii numerelor, pornind în sens invers de la numerele complexe la cele reale, raționale și naturale. Dar procesul nu s-a oprit aici. Sistemele de numere au fost reinterpretate în funcție de ingredienți mai simpli – mulțimile.

Teoria mulțimilor a condus la progrese însemnate, între care un sistem bine pus la punct, deși neortodox, de numere transfinite. Ea a dezvăluit și anumite paradoxuri fundamentale, legate de noțiunea de mulțime. Rezolvarea acestor paradoxuri n-a fost, așa cum spera Hilbert, o justificare completă a întregii matematici axiomatice și o demonstrație a coerenței ei logice, ci demonstrarea faptului că matematica are limitări inerente și că anumite probleme *nu au soluții*. Rezultatul a fost o modificare profundă a modului nostru de a concepe adevărul matematic și certitudinea. E mai bine să fim conștienți de limitările noastre decât să trăim într-un paradis al nebunilor.

18

Abordarea rațională a șanselor



În secolul XX şi la începutul secolului XXI dezvoltarea matematicii a fost explozivă. Ultima sută de ani a adus mai multe descoperiri matematice decât întreaga istorie anterioară a omenirii. Chiar şi o schiță a acestor descoperiri s-ar întinde pe mii de pagini, aşa încât suntem obligați să alegem câteva mostre din imensul material disponibil.

O ramură recentă a matematicii e teoria probabilităților, care studiază şansele de producere a evenimentelor întâmplătoare. Este matematica incertitudinii. În epocile anterioare suprafața ei a fost abia zgâriată, prin calcule combinatorii privind şansele la jocurile de noroc şi prin metode de îmbunătățire a preciziei observațiilor astronomice, în ciuda erorilor de observare, pentru ca la începutul secolului XX teoria probabilităților să devină un domeniu de sine stătător.

Probabilități și statistică

În prezent teoria probabilităților e un domeniu important al matematicii, iar ramura ei aplicativă, statistica, are un mare impact asupra vieții de toate zilele – mai mare, poate, decât orice alt domeniu al matematicii. Statistica e una dintre principalele tehnici analitice folosite în medicină. Nici un medicament nu ajunge pe piață şi nici un tratament nu e permis în vreun spital înainte ca testele clinice să fi stabilit că e suficient de sigur şi că e eficient. Siguranța este o noțiune relativă: tratamente care au şanse mici de reuşită pentru cazuri mai puțin grave pot fi aplicate unor pacienți suferind de boli altminteri fatale.

Teoria probabilităților s-ar putea să fie şi domeniul matematicii cel mai greşit înțeles de publicul larg, şi de care se abuzează cel mai mult. Dar, folosită corect şi inteligent, ea contribuie din plin la bunăstarea oamenilor.

Jocurile de noroc

Câteva probleme probabilistice datează din vechime. În Evul Mediu se discuta despre şansele de a obține un anumit număr la aruncarea a două zaruri. Pentru a vedea despre ce e vorba, să începem cu un singur zar. Presupunând că zarul e nemăsluit – noțiune care se dovedeşte a fi greu de definit –, cele şase numere, 1,

2, 3, 4, 5 şi 6, ar trebui, pe termen lung, să apară la fel de frecvent. Pe termen scurt egalitatea e imposibilă: de pildă, prima aruncare trebuie să ne dea doar unul dintre aceste numere. După şase aruncări e puţin probabil ca fiecare număr să apară exact o dată. Dar într-o serie lungă de aruncări, sau încercări, ne aşteptăm ca fiecare număr să apară aproximativ o dată din şase, deci cu probabilitatea de 1/6. Dacă nu se întâmplă aşa, aproape sigur zarul e măsluit.

Un eveniment cu probabilitate 1 este cert, iar unul cu probabilitate 0 este imposibil. Toate probabilităţile se situează între 0 şi 1, iar probabilitatea unui eveniment este raportul dintre încercările în care se produce evenimentul şi numărul total de încercări.

Să ne întoarcem la problema medievală. Să presupunem că aruncăm simultan două zaruri (ca în numeroase jocuri, de la table la Monopoly). Care e probabilitatea ca suma lor să fie 5? În urma unor raţionamente şi a unor experienţe, răspunsul se dovedeşte a fi 1/9. De ce? Să presupunem că deosebim între ele cele două zaruri colorându-l pe unul cu albastru şi pe celălalt cu roşu. Fiecare zar poate da în mod independent şase numere diferite, în total 36 de perechi posibile diferite de numere, toate la fel de probabile. Combinaţiile (albastru + roşu) care dau 5 sunt 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2 şi 4 + 1; acestea sunt cazuri diferite deoarece zarul albastru dă în fiecare caz rezultate diferite, la fel şi cel roşu. Aşadar, pe termen lung, ne aşteptăm să obţinem suma 5 în patru ocazii din 36, cu o probabilitate de 4/36 = 1/9.

O altă problemă veche, cu aplicaţii practice evidente, este împărţirea potului într-un joc de noroc întrerupt dintr-un motiv oarecare. Algebriştii renascentişti Pacioli, Cardano şi Tartaglia au scris cu toţii despre această problemă. Mai târziu, Cavalerul de Meré i-a pus aceeaşi problemă lui Pascal, iar Pascal şi Fermat au corespondat pe această temă.

De aici s-a ajuns la o înţelegere implicită a naturii probabilităţilor şi a felului în care se calculează ele. Dar totul era vag şi foarte prost definit.

Combinări

O primă definiţie a probabilităţii unui eveniment este proporţia ocaziilor în care el se va produce. Dacă aruncăm un zar, iar cele şase feţe sunt echivalente, probabilitatea obţinerii oricărei feţe este 1/6. Multe dintre cercetările de început în teoria probabilităţilor s-au bazat pe calcularea numărului de moduri în care un eveniment se poate produce şi împărţirea la numărul total de posibilităţi.

O problemă elementară aici este cea a combinărilor. Dându-se, să zicem, un pachet cu şase cărţi, câte submulţimi diferite de câte patru cărţi conţine el?

O metodă este de a enumera submulțimile: numerotând cărțile de la 1 la 6, acestea sunt

1234 1235 1236 1245 1246
1256 1345 1346 1356 1456
2345 2346 2356 2456 3456

deci ele sunt în număr de 15. Dar pentru un mare număr de cărți metoda aceasta e greoaie și e nevoie de una mai sistematică.

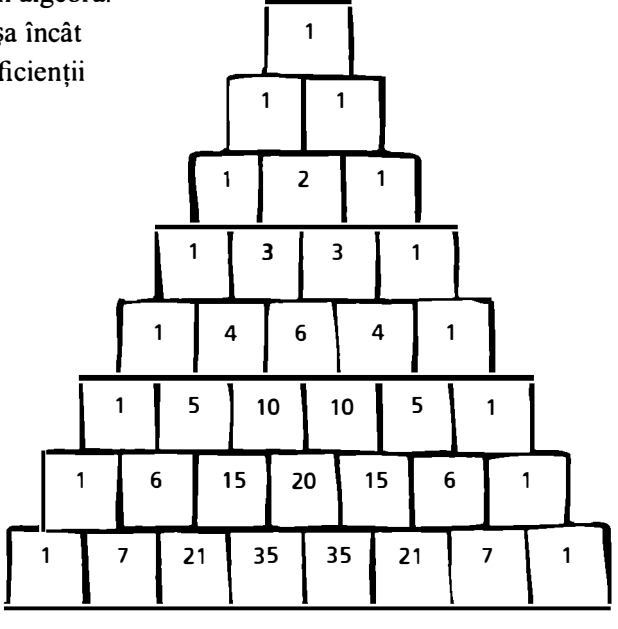
Imaginați-vă că alegeți cele patru elemente ale submulțimii unul câte unul. Primul element poate fi ales în șase moduri, al doilea numai în cinci (deoarece unul a fost eliminat), al treilea în patru moduri, al patrulea în trei moduri. Numărul total de alegeri, în această ordine, este $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$. Fiecare submulțime este însă numărată de 24 de ori – pe lângă 1234 întâlnim și 1243, 2134 ș.a.m.d., și există 24 ($4 \times 3 \times 2$) de moduri de a rearanja patru obiecte. Așadar, răspunsul corect este 360/24, ceea ce înseamnă 15. Acest raționament arată că numărul de moduri în care putem alege m obiecte dintr-un total de n obiecte este

$$C_m^n = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times m}$$

Aceste expresii se numesc *coeficienți binomiali*, deoarece ele apar și în algebră. Dacă le aranjăm într-un tabel, așa încât cea de a n-a linie să conțină coeficienții binomiali

$$C_n^0\ C_n^1\ C_n^2 \ldots C_n^n$$

atunci rezultatul arată astfel:



Triunghiul lui Pascal

Pe linia 7 găsim numerele 1, 6, 15, 20, 15, 6, 6,1. Comparând cu formula

$$(x + 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

vedem aceleaşi numere apărând drept coeficienţi. Nu e o coincidenţă.

Triunghiul numerelor se numeşte *triunghiul lui Pascal* pentru că a fost studiat de Pascal în 1655, dar a fost cunoscut cu mult înainte; apare pe la 950 într-un comentariu la o veche carte indiană, *Chandas Shastra*. Era cunoscut şi de matematicienii persani Al-Karaji şi Omar Khayyám, iar în Iranul de azi e numit triunghiul lui Khayyám.

Teoria probabilităţilor

Coeficienţii binomiali au fost folosiţi cu bune rezultate în prima carte despre probabilităţi: *Ars conjectandi* (*Arta de a emite ipoteze*) scrisă de Daniel Bernoulli în 1713. Straniul titlu e explicat în carte:

> „Arta de a emite ipoteze, sau arta stocastică, este arta de a evalua pe cât de exact e cu putinţă probabilităţile lucrurilor, aşa încât în judecăţile şi acţiunile noastre să ne putem bizui întotdeauna pe ceea ce e mai bun, mai nimerit, mai sigur, mai precaut; acesta e singurul scop al înţelepciunii filozofului şi al prudenţei omului de stat."

Aşadar o traducere mai potrivită ar fi *Arta ghicitului*.

Bernoulli a pornit de la premisa că un număr tot mai mare de încercări aduce cu sine o tot mai bună estimare a probabilităţii.

> „Să presupunem că într-o urnă se află 3000 de pietricele albe şi 2000 de pietricele negre, ceea ce noi nu ştim, iar în încercarea de a determina numărul acestor pietricele extragem una după alta câte o pietrică (punând de fiecare dată la loc pietricica extrasă [...]) şi observăm cât de des sunt extrase o pietricică albă şi una neagră [...]. Putem face acest lucru aşa încât să devină de zece ori, de o sută de ori, de o mie de ori etc. mai probabil ca numărul de pietricele albe şi negre alese să fie în raportul 3:2, acelaşi ca al pietricelelor din urnă, decât într-un raport diferit?"

Aici Bernoulli a pus o întrebare fundamentală şi a inventat un exemplu ilustrativ standard, cel al bilelor dintr-o urnă. Evident, el credea că raportul 3:2 e rezultatul rezonabil, dar îşi dădea seama că experimentele reale nu dau decât aproximativ acest rezultat. Credea însă că dacă se fac suficient de multe încercări, aproximaţia devine din ce în ce mai bună.

Există aici o dificultate care a apăsat multă vreme întregul domeniu. Într-un asemenea experiment e fără îndoială *posibil* ca din pură întâmplare fiecare pietricică extrasă să fie albă. Nu avem deci garanția absolută că raportul *trebuie* să tindă întotdeauna spre 3:2. Tot ce putem spune este că e extrem de probabil ca numerele să se apropie de acest raport. Dar acum riscăm să intrăm într-un cerc vicios: folosim rapoartele observate în încercări pentru a deduce probabilitățile și folosim probabilitățile în această deducție. Cum putem observa faptul că probabilitatea ca toate pietricelele să fie albe e foarte mică?

La ce i-a ajutat probabilitatea

În 1710 John Arbuthnot a prezentat Societății Regale o lucrare în care folosea teoria probabilităților ca dovadă a existenței lui Dumnezeu. El a analizat numărul anual de botezuri ale copiilor de sex bărbătesc și femeiesc în perioada 1629–1710 și a constatat că erau ceva mai mulți băieți decât fete. Mai mult, raportul era aproximativ același în fiecare an. Faptul acesta era deja bine cunoscut, dar Arbuthnot a calculat probabilitatea ca raportul să rămână constant. Rezultatul obținut era foarte mic, 2^{-82}. El a arătat apoi că dacă același efect se produce în toate țările și în toate epocile din istorie, atunci șansele trebuie să fie și mai mici și a tras concluzia că răspunzătoare nu e întâmplarea, ci providența divină.

Pe de altă parte, în 1872 Francis Galton a folosit probabilitățile pentru a estima eficiența rugăciunii, observând că zilnic un număr imens de oameni spuneau rugăciuni pentru sănătatea familiei regale. El a strâns date și a calculat „vârsta medie atinsă de bărbații din diferite categorii care au trăit mai mult de 30 de ani, între 1758 și 1743", adăugând că „decesele prin accident sunt excluse". Aceste categorii erau oamenii de vază, familia regală, clerul, avocații, medicii, aristocrații, negustorii, ofițerii navali, literații și savanții, ofițerii și artiștii plastici. Galton a descoperit că „suveranii au într-adevăr viața cea mai scurtă dintre toți cei care beneficiază de avantajele bunăstării. Rugăciunea nu are deci nici o eficiență, dacă nu cumva facem presupunerea discutabilă după care condițiile vieții regale ar fi în chip firesc încă mai periculoase, iar influența lor ar fi nu complet, ci parțial neutralizată de efectul rugăciunilor publice."

Dacă o facem printr-o mulțime de încercări, există posibilitatea ca rezultatul să fie înșelător, din același motiv; iar singura ieșire pare a fi să facem și mai multe încercări pentru a arăta că acest eveniment e extrem de improbabil. Suntem prinși în ceea ce seamănă cu o regresie infinită.

Din fericire, primii cercetători ai teoriei probabilității nu s-au împiedicat de această dificultate logică. La fel ca în cazul analizei, ei știau ce aveau de făcut. Justificarea filozofică era mai puțin interesantă decât găsirea răspunsurilor.

Cartea lui Bernoulli conținea o mulțime de idei și rezultate importante. Unul dintre ele, *Legea Numerelor Mari*, stabilește legătura dintre probabilități și raporturile pe termen lung ale observațiilor din încercări. În esență, ea demonstrează că probabilitatea ca raportul să *nu* se apropie foarte mult de probabilitatea corectă tinde la zero când numărul de încercări crește nelimitat.

O altă teoremă fundamentală poate fi formulată în termenii aruncării repetate a unei monede asimetrice, cu o probabilitate p de a obține capul și $q = 1 - p$ de a obține pajura. Dacă moneda e aruncată de două ori, care e probabilitatea de a obține exact 2, 1 sau 0 capete? Răspunsul lui Bernoulli a fost p^2, $2pq$ și q^2. Aceștia sunt termenii care apar din dezvoltarea lui $(p + q)^2$ ca $p^2 + 2pq + q^2$. Analog, dacă moneda e aruncată de trei ori, probabilitățile de a obține 3, 2, 1 sau 0 capete sunt termenii succesivi din $(p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$.

Mai general, dacă moneda e aruncată de n ori, probabilitatea de a obține exact m steme este egală cu

$$C_n^m p^m q^{n-m}$$

termenul corespunzător din dezvoltarea lui $(p + q)^n$.

Între 1730 și 1738 Abraham de Moivre a extins rezultatele lui Bernoulli privind monedele asimetrice. Când m și n sunt mari e greu de calculat exact coeficientul binomial, iar de Moivre a dedus o formulă aproximativă legând distribuția binomială de ceea ce numim azi *funcția erorilor* sau *distribuția normală*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$$

De Moivre a fost, se pare, primul care a explicitat această legătură. Ea avea să se dovedească fundamentală pentru dezvoltarea teoriei probabilităților și statisticii.

Definirea probabilității

O problemă conceptuală importantă în teoria probabilităților era definirea probabilității. Chiar şi exemple simple – în care oricine ştia răspunsul – prezentau dificultăți logice. Dacă aruncăm o monedă, pe termen lung ne aşteptăm la un număr egal de capete şi de pajuri, iar cele două probabilități sunt $^1/_2$. Mai exact, aceasta e probabilitatea presupunând că moneda e nemăsluită. O monedă asimetrică ar putea să dea întotdeauna capete. Dar ce înseamnă „nemăsluită"? O variantă ar fi ca banul şi stema să fie echiprobabile. Dar expresia „echiprobabile" se referă la probabilități. Pare să fie un cerc vicios: pentru a defini probabilitatea trebuie să ştim ce e probabilitatea.

Ieşirea din impas datează de pe vremea lui Euclid şi a fost dusă la perfecțiune de algebriştii de la sfârşitul secolului XIX şi începutul secolului XX. Axiomatizați. Încetați să vă mai întrebați ce sunt probabilitățile. Enunțați proprietățile pe care doriți să le aibă probabilitățile şi considerați-le axiome. Deduceți tot restul din ele.

Întrebarea era: care sunt axiomele bune? Când probabilitățile se referă la mulțimi finite de evenimente, întrebarea are un răspuns simplu. Dar aplicațiile teoriei probabilităților implicau adesea alegeri din mulțimi infinite de posibilități. Dacă măsori, de pildă, unghiul dintre două stele, acesta poate fi în principiu orice număr real cuprins între 0^o şi 180^o. Există o infinitate de numere reale. Dacă arunci o săgeată la țintă, aşa încât pe termen lung ea să aibă aceeaşi şansă de a lovi orice punct de pe țintă, atunci probabilitatea de a lovi o anumită regiune trebuie să fie aria acelei regiuni împărțită la aria totală a țintei. Dar pe țintă există o infinitate de puncte şi o infinitate de regiuni.

Aceste dificultăți generau tot felul de probleme şi tot felul de paradoxuri. În cele din urmă ele au fost rezolvate printr-o nouă idee din analiză, noțiunea de măsură.

Analiştii care lucrau în teoria integrării au înțeles că trebuie să meargă mai departe decât Newton şi să definească noțiuni tot mai sofisticate legate de funcțiile integrabile şi de integrală. După o serie de tentative ale mai multor matematicieni, Henri Lebesgue a reuşit să definească un tip foarte general de integrală, numită acum integrala Lebesgue, cu numeroase proprietăți analitice utile.

Cheia acestei definiții a fost *măsura Lebesgue*, care este o modalitate de a atribui o anumită lungime unor submulțimi foarte complicate ale dreptei reale. Să presupunem că mulțimea constă în intervale disjuncte de lungimi 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$ ş.a.m.d. Aceste numere formează o serie convergentă, cu suma 2. Lebesgue a arătat că această mulțime are lungimea 2. Noțiunea lui Lebesgue avea o nouă trăsătură: ea este *numărabil aditivă*. Dacă reunim o colecție infinită de mulțimi

disjuncte, iar dacă această colecție e numărabilă în sensul lui Cantor, cu cardfinalul $\aleph_0$, atunci măsura reuniunii este suma seriei infinite alcătuite din măsurile mulțimilor individuale.

Ideea de măsură s-a dovedit a fi mai importantă decât integrala la care a condus. În particular, probabilitatea este o măsură. Această proprietate a fost explicitată în 1930 de Andrei Kolmogorov, care a formulat axiomele probabilităților. Mai precis, el a definit un *spațiu al probabilităților*. Acesta cuprinde o mulțime X, o colecție B de submulțimi ale lui X, numite *evenimente* și o măsură m pe B. Axiomele spun că m este o măsură și că $m(X) = 1$ (adică probabilitatea să se întâmple *ceva* e întotdeauna 1). Colecția B mai trebuie să aibă anumite proprietăți din teoria mulțimilor care-i permit să susțină o măsură.

Pentru un zar, mulțimea X constă din numerele 1–6, iar B conține orice submulțime a lui X. Măsura oricărei mulțimi Y din B este numărul elementelor lui Y împărțit la 6. Această măsură e conformă cu ideea intuitivă că fiecare față a zarului are probabilitatea de apariție $^1/_6$. Dar folosirea unei măsuri ne permite să considerăm nu doar fețe, ci mulțimi de fețe. Probabilitatea asociată unei asemenea mulțimi Y este probabilitatea apariției unei fețe din Y. Intuitiv, aceasta e mărimea lui Y împărțită la 6.

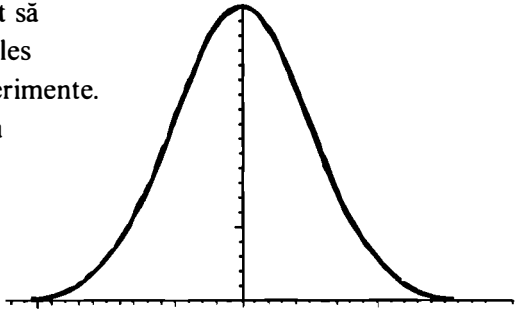
Cu această idee simplă, Kolmogorov a pus capăt unei controverse vechi de secole și a creat o teorie riguroasă a probabilităților.

Datele statistice

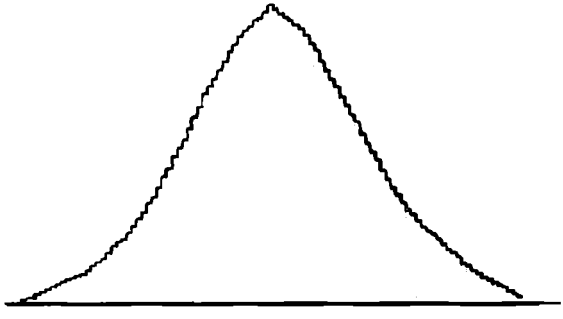
Ramura aplicată a teoriei probabilităților e statistica, o disciplină care folosește probabilitățile pentru analiza datelor din lumea reală. Ea a apărut din astronomia secolului XVIII, când trebuiau luate în considerare erorile de observație. Empiric și teoretic, aceste erori sunt distribuite conform funcției erorilor sau distribuției normale, numită deseori curba clopot datorită formei sale. Aici eroarea e măsurată pe orizontală, cu eroarea zero la mijloc, iar înălțimea curbei reprezintă probabilitatea unei erori de o anumită mărime. Erorile mici, apropiate de zero, sunt destul de probabile, în vreme ce erorile mari sunt foarte improbabile.

În 1835 Adolphe Quetelet a pledat pentru folosirea curbei clopot în prelucrarea datelor sociale – nașteri, decese, divorțuri, crime și sinucideri. El a descoperit că deși asemenea evenimente sunt imposibil de prevăzut pentru un individ, ele prezintă tipare statistice atunci când sunt observate la o întreagă populație. El și-a personificat ideea vorbind despre „omul mediu", un individ fictiv care era mediu în toate privințele. Pentru Quetelet, omul mediu nu era doar un concept matematic: el era ținta dreptății sociale.

Pe la 1880 ştiinţele sociale au început să folosească pe larg ideile statistice, mai ales curba clopot, ca un substitut pentru experimente. În 1865 Francis Galton a făcut un studiu privind ereditatea umană. Ce legătură e între înălţimea unui copil şi cea a părinţilor? Ce se putea spune despre greutate sau înzestrarea intelectuală? El a adoptat curba clopot a lui Quetelet, dar a privit-o ca pe o metodă de a separa populaţii diferite, nu ca pe un imperativ moral. Dacă anumite date prezentau două vârfuri în loc de unul singur, ca în curba clopot, atunci populaţia trebuia să fie compusă din două subpopulaţii, fiecare urmând propria sa curbă clopot. Pe la 1877 cercetările lui Galton l-au condus spre inventarea analizei regresionale, un mijloc de a lega un set de date cu altul pentru a găsi relaţia cea mai probabilă dintre ele.



Curba clopot



Graficul lui Quetelet al numărului de oameni având o anumită înălţime: înălţimea este pe orizontală, numărul de oameni pe verticală

O altă figură importantă a fost Ysidro Edgeworth. Lui Edgeworth îi lipsea viziunea lui Galton, dar era un mult mai bun tehnician, şi a aşezat ideile lui Galton pe o bază matematică solidă. Un al treilea a fost Karl Pearson, care a contribuit mult la dezvoltarea matematicii, dar mai cu seamă a convins lumea de utilitatea statisticii.

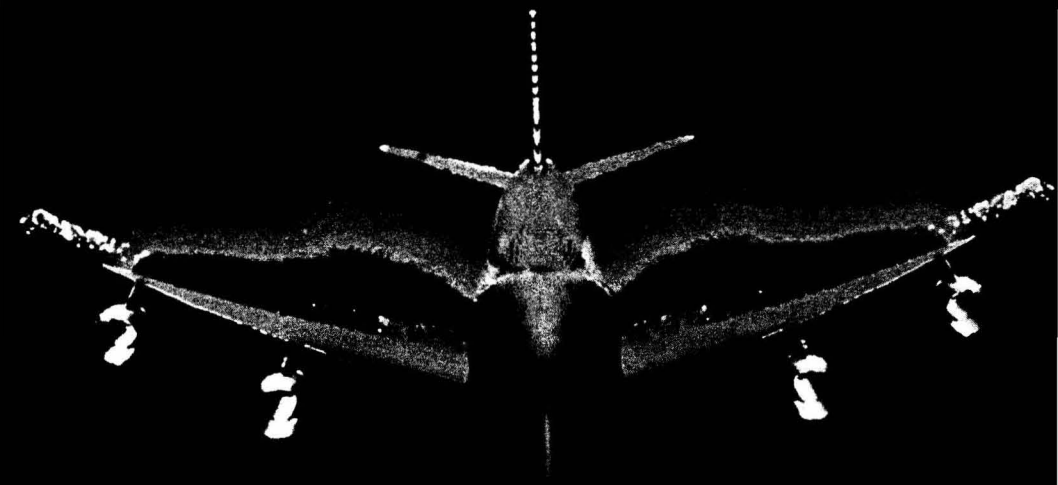
Newton şi urmaşii săi au demonstrat că matematica poate fi o cale extrem de eficientă în înţelegerea regularităţilor naturii. Inventarea teoriei probabilităţilor şi a ramurii ei aplicate, statistica, a făcut acelaşi lucru pentru *iregularităţile* naturii. E remarcabil faptul că evenimentele întâmplătoare prezintă tipare numerice. Dar aceste tipare apar doar în cantităţi statistice cum ar fi tendinţele pe termen lung şi mediile. Ele oferă predicţii, dar acestea se referă doar la probabilitatea ca un anumit eveniment să se producă. Ele nu prezic când anume se va produce el. Cu toate acestea, probabilităţile sunt astăzi tehnica matematică cea mai răspândită, folosită în ştiinţă şi medicină pentru a stabili dacă o deducţie bazată pe observaţii e semnificativă sau rezultă doar dintr-o asociere întâmplătoare.

La ce ne ajută probabilitățile

O foarte importantă utilizare a teoriei probabilităților apare în testarea noilor medicamente. Aceste testări adună date privind efectele medicamentelor. E vindecarea doar aparentă? Apar efecte adverse nedorite? Oricare ar fi cifrele obținute, marea întrebare este dacă datele sunt statistic semnificative – rezultă ele dintr-un efect veritabil al medicamentului sau sunt rezultatul purei întâmplări? Problema e rezolvată folosind metode statistice cunoscute sub numele de *testarea ipotezelor*. Acestea compară datele cu un model statistic și estimează probabilitatea ca rezultatele să fi apărut din întâmplare. Dacă, de pildă, probabilitatea aceasta e mai mică de 0,01, atunci cu o probabilitatea de 0,99 datele *nu* se datorează întâmplării, adică efectul e semnificativ la nivelul de 99%. Asemenea metode fac posibilă determinarea, cu un grad de încredere ridicat, a acelor tratamente care sunt eficace sau a acelora care produc efecte adverse și n-ar trebui folosite.

Mașini de calcul și matematică computațională

19



Matematicienii au visat mereu să construiască maşini care să uşureze corvoada calculelor de rutină. Cu cât pierzi mai puțin timp calculând, cu atât ai mai mult timp să te gândeşti. Din vremuri preistorice bețişoare şi pietricele au ajutat la socotit, iar grămezile de pietricele au condus până la urmă la abacuri, în care bilele de pe sârmă reprezintă cifrele numerelor. Mai ales în varianta sa japoneză, abacul mânuit de un expert putea efectua cu rapiditate şi precizie operațiile aritmetice elementare. Pe la 1950 un abac japonez depăşea performanțele unui calculator mecanic.

Se împlinește un vis?

În secolul XXI apariția calculatoarelor electronice şi răspândirea circuitelor integrate (cipuri) au conferit maşinilor un mare avantaj. Ele au devenit mult mai rapide decât creierul uman sau decât un dispozitiv mecanic – miliarde sau bilioane de operații aritmetice în fiecare secundă sunt acum un loc comun. Cel mai rapid în momentul când scriu aceste rânduri, Blue Gene/L de la IBM, poate efectua un septilion de calcule (operații cu virgulă mobilă) pe secundă. Calculatoarele actuale au şi o imensă memorie, stocând echivalentul a sute de cărți, disponibile la apeluri aproape instantanee. Grafica în culori a atins o culme a perfecțiunii.

Ascensiunea calculatorului

Maşinile de la început erau mai modeste, dar şi ele economiseau mult timp şi efort. Primul dispozitiv după abac au fost probabil oasele, sau bețişoarele lui Napier, un sistem de vergele marcate pe care Napier le-a inventat înainte să descopere logaritmii. În esență, ele erau componentele universale ale înmulțirii efectuate după metoda tradițională. Bețişoarele puteau fi folosite în locul creionului şi hârtiei, economisind timpul de scriere al numeralelor, dar imitau calculele făcute de mână.

În 1642 Pascal a inventat primul calculator mecanic veritabil, Maşina Aritmetică, pentru a-şi ajuta tatăl la socoteli. Ea putea efectua adunarea şi scăderea, dar nu şi înmulțirea şi împărțirea. Avea opt discuri care se roteau, aşa încât opera cu numere de opt cifre. În următorii zece ani Pascal a construit cincizeci de maşini de acest tip, dintre care cele mai multe se află azi în muzee.

În 1671 Leibniz a proiectat o maşină pentru înmulţire, şi a construit una în 1694, remarcând că „e scandalos ca oameni de valoare să-şi piardă ore întregi ca nişte sclavi puşi să trudească la calcule ce ar putea fi încredinţate oricui altcuiva dacă s-ar folosi nişte maşini". Şi-a botezat maşina *Staffelwalze* (numărător de paşi). Ideea de bază a fost intens folosită de urmaşii săi.

Una dintre cele mai ambiţioase propuneri pentru o maşină de calculat a fost făcută de Charles Babbage. În 1812 el spunea: „Mă aflam într-o încăpere a Societăţii Analitice, la Cambridge, cu privirea pierdută într-un tabel de logaritmi deschis în faţa mea. Un alt membru al societăţii, intrând în cameră şi văzându-mă pe jumătate adormit, a strigat «Hei, Babbage, la ce visezi?», iar eu i-am răspuns «Mă gândesc că toate tabelele astea» (arătând spre logaritmi) «ar putea fi calculate de o maşinărie»." Babbage şi-a urmat visul tot restul vieţii, construind un prototip numit maşina diferenţială. A cerut fonduri guvernamentale pentru maşinării mai complicate. Proiectul lui cel mai ambiţios, maşina analitică, era efectiv un calculator mecanic programabil. Nici una din aceste maşini n-a fost construită, deşi s-au fabricat diverse componente. O reconstrucţie modernă a maşinii diferenţiale se află la Muzeul Ştiinţei din Londra – şi funcţionează. Augusta Ada Lovelace a contribuit la eforturile lui Babbage, scriind primele programe de calculator.

Primul calculator produs în serie, Aritmometrul, a fost manufacturat de Thomas de Colmar în 1820. El întrebuinţa un sistem de roţi dinţate şi a fost produs până în 1920. Următorul pas important a fost mecanismul roţii cu ştifturi al inventatorului suedez Willgodt T. Odhner. Calculatorul lui a constituit modelul pentru zeci, dacă nu sute de maşini similare ale diverşilor producători. Maşina era pusă în funcţiune de operator, care învârtea un mâner pentru a face să se rotească o serie de discuri pe care apăreau cifrele 0–9. Cu puţin antrenament se puteau efectua calcule complicate la o mare viteză. Calculele ştiinţifice şi inginereşti în proiectul Manhattan, din al Doilea Război Mondial, pentru construcţia primei bombe atomice au fost efectuate cu asemenea maşini de către o echipă de „calculatoare" – în principal tinere femei. Apariţia calculatoarelor puternice şi ieftine în anii '80 a scos din uz calculatoarele mecanice, dar până atunci ele au fost din plin folosite în afaceri şi în calcule ştiinţifice.

Maşinile de calcul depăşesc simpla aritmetică, deoarece multe calcule ştiinţifice pot fi traduse numeric ca lungi serii de operaţii aritmetice. Una dintre primele metode numerice, care rezolvă ecuaţii cu o precizie oricât de bună, este *metoda lui Newton*, după numele inventatorului ei. Ea rezolvă o ecuaţie $f(x) = 0$ calculând o serie de aproximaţii succesive ale soluţiei, fiecare îmbunătăţind-o

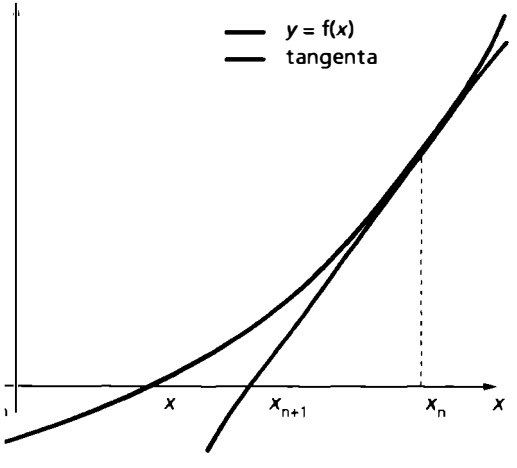
Augusta Ada King, contesă de Lovelace

1815–1852

Augusta Ada a fost fiica poetului Lord Byron şi a Annei Milbanke. Părinţii ei s-au despărţit la o lună de la naşterea sa, iar ea nu şi-a mai văzut tatăl niciodată. Copilul a dovedit talent matematic, şi Lady Byron, socotind că e un bun antrenament al minţii, şi-a încurajat fiica să studieze matematica. În 1833 Ada l-a întâlnit la o petrecere pe Babbage, iar la scurt timp a văzut prototipul maşinii diferenţiale, găsindu-l fascinant şi înţelegându-i rapid modul de funcţionare. A devenit contesă de Lovelace atunci când soţul ei, William, a fost făcut conte în 1838.

În traducerea din 1843 a lucrării lui Luigi Manabrea *Notions sur la machine analytique de Charles Babbage* ea a adăugat ceea ce reprezintă primele exemple de programe. „Trăsătura distinctivă a maşinii analitice", spunea ea, „este folosirea principiului născocit de Jacquard pentru reglarea, cu ajutorul cartelelor perforate, a celor mai complicate modele în fabricarea brocartului... Putem spune pe drept cuvânt că maşina analitică ţese modele algebrice la fel cum războiul de ţesut al lui Jacquard ţese flori şi frunze."

La vârsta de 36 de ani s-a îmbolnăvit de cancer uterin şi a murit după grele suferinţe, epuizată de tratamentele doctorilor.



pe precedenta, dar bazându-se pe ea. Pornind de la o estimare iniţială x_1, sunt deduse aproximaţii tot mai bune $x_2, x_3 \ldots x_n, x_{n+1}$ folosind formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Metoda lui Newton
de rezolvare numerică a unei ecuaţii

unde f' este derivata lui f. Metoda se bazează pe geometria curbei $y = f(x)$ în vecinătatea soluției. Punctul x_{n+1} este cel în care tangenta la curbă în x_n intersectează axa x-ilor. După cum se vede din diagramă, acesta e mai apropiat de x decât punctul inițial.

O a doua aplicație importantă a metodelor numerice este în ecuațiile diferențiale. Să presupunem că vrem să rezolvăm ecuația

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

știind că $x = x_0$ la momentul $t = t_0$.
Cea mai simplă metodă, datorată lui Euler, este să aproximăm pe $\frac{dx}{dt}$ prin $\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}$ unde ε este foarte mic.
Atunci o aproximare a ecuației diferențiale ia forma

$$x(t + \varepsilon) = x(t) + \varepsilon\, f(x(t))$$

Pornind de la $x(0) = x_0$, deducem succesiv valorile lui $f(\varepsilon)$, $f(2\varepsilon)$, $f(3\varepsilon)$ și, în general, $f(n\varepsilon)$ pentru orice întreg $n > 0$. O valoare tipică pentru ε poate fi, să zicem, 10^{-6}. Un milion de iterații ale formulei ni-l dau pe $x(1)$, un alt milion pe $x(2)$ ș.a.m.d. Cu calculatoarele de azi, un milion de calcule sunt ceva banal, iar metoda e perfect utilizabilă.

Metoda lui Euler e însă prea simplă pentru a fi pe deplin satisfăcătoare, drept care i s-au adus numeroase îmbunătățiri. Cele mai cunoscute sunt metodele Runge–Kutta, după numele matematicienilor germani Karl Runge și Martin Kutta, care au inventat prima metodă de acest tip în 1901. Una dintre ele, așa-numita metodă Runge-Kutta de ordinul patru, e larg folosită în inginerie, știință și matematica teoretică.

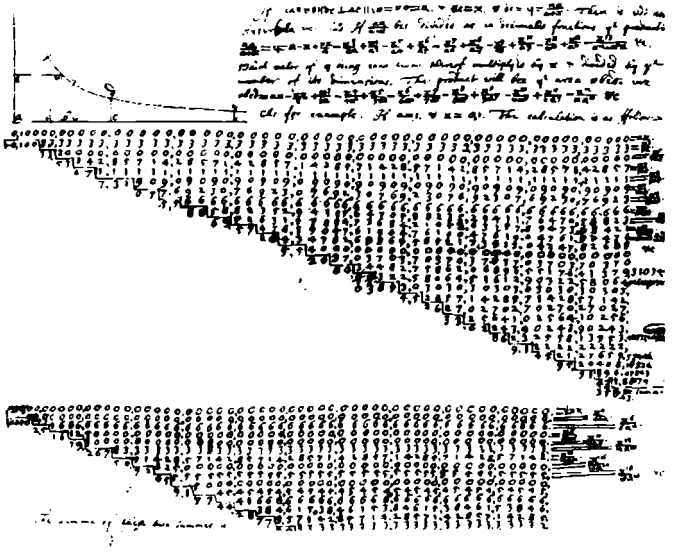
Necesitățile dinamicii nelineare moderne au generat mai multe metode sofisticate care evită acumularea erorilor de-a lungul unor mari intervale de timp prin păstrarea unei anumite structuri asociate cu soluția exactă. De exemplu, într-un sistem mecanic fără frecare, energia totală se conservă. Metoda numerică poate fi concepută astfel încât la fiecare pas energia să se conserve *exact*. Acest procedeu elimină posibilitatea ca soluția calculată să se îndepărteze lent de cea exactă, ca un pendul care se apropie încet de repaus pe măsură ce își pierde energia.

Încă mai complicați sunt integratorii simplectici, care rezolvă sisteme de ecuații diferențiale din mecanică păstrând explicit și exact structura simplectică a ecuațiilor lui Hamilton, care e un straniu, dar extrem de important tip de

geometrie adaptat celor două tipuri de variabile, poziția și impulsul. Integratorii simplectici joacă un rol decisiv în mecanica cerească, unde – de exemplu – astronomii pot dori să urmărească mișcările planetelor din sistemul solar de-a lungul a miliarde de ani. Folosind integratorii simplectici, Jack Wisdom, Jacques Laskar și alții au demonstrat că pe termen lung sistemul solar are un comportament haotic, că Uranus și Neptun au fost cândva mult mai apropiați de Soare decât sunt în prezent și că în cele din urmă orbita lui Mercur se va apropia de cea a lui Venus, așa încât una sau alta dintre planete ar putea fi aruncată în afara sistemului solar. Integratorii simplectici sunt singurii care dau încredere în precizia calculelor pentru perioade atât de lungi.

La ce i-a ajutat analiza numerică

Newton a trebuit nu numai să identifice tiparele din natură, ci și să elaboreze metode de calcul. El a folosit din plin seriile de puteri pentru reprezentarea funcțiilor, deoarece putea deriva și integra asemenea serii termen cu termen. A folosit seriile și pentru a calcula valori ale funcțiilor, o metodă folosită și azi. Pe o pagină din manuscrisele sale, datând din



Calculul ariei de sub o hiperbolă, efectuat de Newton

1665, se află calculul numeric al ariei de sub o hiperbolă, în care recunoaștem acum funcția logaritmică. El a însumat termenii unei serii infinite, lucrând până la uimitoarea precizie de 55 de zecimale.

Calculatoarele au nevoie de matematică

După cum folosim calculatoarele în slujba matematicii, putem folosi şi matematica în slujba calculatoarelor. De fapt, principiile matematice au fost de la început importante în conceperea calculatoarelor, fie în demonstrarea conceptelor, fie ca elemente esenţiale ale proiectării.

Toate calculatoarele digitale de azi operează cu notaţia binară, în care numerele sunt reprezentate ca şiruri de numai două cifre: 0 şi 1. Principalul avantaj al sistemului binar este că el corespunde conectării: 0 înseamnă deconectat, 1 conectat. Sau 0 înseamnă voltaj nul, iar 1 înseamnă 5 volţi sau orice valoare standard a circuitului electric. Simbolurile 0 şi 1 mai pot fi interpretate şi în cadrul logicii matematice ca *valori de adevăr*: 0 înseamnă fals, iar 1 adevărat. Calculatoarele pot deci efectua nu numai calcule aritmetice, ci şi calcule logice. Operaţiile logice sunt de fapt mai simple, iar operaţiile aritmetice pot fi privite ca şiruri de operaţii logice. Perspectiva algebrică a lui Boole asupra matematicii lui 0 şi 1 din *Legile gândirii* oferă un formalism pentru logica operaţiilor pe calculator. Motoarele de căutare pe Internet efectuează căutări booleene, adică ele caută articole definite printr-o anumită combinaţie de criterii logice, de pildă „să conţină cuvântul «pisică», dar să nu conţină «câine»".

Algoritmii

Matematica a ajutat informatica, iar informatica, la rândul ei, a stimulat dezvoltarea unor noi direcţii în matematică. Noţiunea de *algoritm* – un procedeu sistematic de rezolvare a unei probleme – este un exemplu. (Numele vine de la algebristul arab al-Khowarizmi.) O întrebare deosebit de interesantă este: Cum depinde timpul de rulare al unui algoritm de dimensiunea datelor de intrare?

De exemplu, algoritmul lui Euclid pentru găsirea celui mai mare divizor comun al două numere naturale m şi n, cu $m \leq n$, este următorul:

- Împărţim pe n la m şi obţinem restul r.
- Dacă $r = 0$, atunci cel mai mare divizor comun este m: STOP.
- Dacă $r > 0$, atunci înlocuim pe n cu m şi pe m cu r, iar apoi o luăm de la început.

Se poate arăta că dacă n are d cifre zecimale (o măsură a dimensiunii datelor de intrare), atunci algoritmul se opreşte după cel mult $5d$ paşi. Aceasta înseamnă, de exemplu, că dacă ni se dau nişte numere cu 1 000 de cifre, putem calcula cel mai mare divizor comun al lor în cel mult 5 000 de paşi – ceea ce pe un calculator modern ia o fracţiune de secundă.

Algoritmul lui Euclid are un timp de rulare liniar: lungimea calculului e proporțională cu mărimea (în cifre) a datelor de intrare. Mai general, un algoritm are un timp de rulare polinomial, sau este de clasă *P*, dacă timpul lui de rulare este proporțional cu o putere dată (de pildă pătratul sau cubul) a dimensiunii datelor de intrare. Dimpotrivă, toți algoritmii cunoscuți pentru descompunerea în factori primi a unui număr au un timp de rulare exponențial – o anumită constantă ridicată la puterea dimensiunii datelor de intrare. Asta face ca sistemul de criptare RSA să fie (ipotetic) sigur.

...n-avem nici o idee dacă există vreo problemă rezonabilă care să fie non-*P*.

Algoritmii cu timp de rulare polinomial sunt folosiți în calcule pe computerele actuale, în vreme ce algoritmii cu timp de rulare exponențial nu sunt folosiți – deci calculele corespunzătoare nu pot fi efectuate în practică, nici măcar pentru dimensiuni relativ mici ale datelor de intrare. Distincția nu e absolută: un algoritm polinomial poate implica o putere atât de mare, încât să fie neutilizabil, iar anumiți algoritmi cu timp de rulare nepolinomial se pot dovedi totuși utili.

Aici apare principala dificultate teoretică. Pentru un algoritm dat e (relativ) ușor de calculat modul în care depinde timpul de rulare de dimensiunea datelor de intrare și de stabilit dacă aparține sau nu clasei *P*. Este însă extrem de greu de determinat dacă există un algoritm mai eficient pentru a rezolva mai rapid aceeași problemă. Așadar, deși știm că multe probleme pot fi rezolvate printr-un algoritm din clasa *P*, n-avem nici o idee dacă există vreo problemă rezonabilă care să fie non-*P*.

„Rezonabil" are aici un sens tehnic. Unele probleme *trebuie* să fie non-*P* pur și simplu fiindcă *afișarea răspunsului* cere un timp de rulare non-*P*. De exemplu, enumerarea tuturor modurilor posibile de a ordona *n* simboluri. Pentru a exclude asemenea probleme evident non-*P*, e nevoie de o altă noțiune: clasa *NP* a algoritmilor polinomiali *nedeterministici*. Un algoritm este *NP* dacă orice presupunere asupra răspunsului poate fi verificată într-un timp proporțional cu o anumită putere a dimensiunii datelor de intrare. De exemplu, o presupunere privind un factor prim al unui număr foarte mare poate fi rapid verificată printr-o singură împărțire.

O problemă de clasă *P* este automat *NP*. Multe probleme importante, pentru care nu se cunosc algoritmi *P*, se știe că sunt *NP*. Iar astfel ajungem la cea mai profundă și mai dificilă problemă din acest domeniu, a cărei rezolvare va aduce cu sine un premiu de un milion de dolari din partea Institutului Matematic Clay. Coincid oare *P* și *NP*? Răspunsul cel mai plauzibil este nu, deoarece din

$P = NP$ ar rezulta că multe calcule ce par foarte dificile sunt în realitate simple - există scurtături la care nimeni nu s-a gândit.

Problema $P = NP?$ devine încă mai dificilă din cauza unui fenomen fascinant, numit completitudinea *NP*. Multe probleme *NP* au proprietatea că, dacă ele sunt într-adevăr de clasă *P*, atunci *orice* problemă *NP* este tot de clasă *P*. O asemenea problemă se numeşte *NP-completă*. Dacă s-ar putea demonstra că o problemă *NP*-completă oarecare este de clasă *P*, atunci $P = NP$. Pe de altă parte, dacă s-ar dovedi că o problemă *NP* oarecare este non-*P*, atunci *P* nu coincide cu *NP*. O problemă *NP*-completă care a atras atenţia în ultima vreme este asociată cu jocul pe calculator *Minesweeper*. Una mai matematică este problema satisfiabilităţii booleene: fiind dată o propoziţie de logică matematică, poate fi ea adevărată pentru o atribuire de valori logice (adevărat sau fals) a variabilelor sale?

Analiza numerică

Matematica implică mult mai mult decât calcule, dar calculele sunt un însoţitor inevitabil al cercetărilor mai abstracte. Din cele mai vechi timpuri, matematicienii au căutat ajutoare mecanice care să-i scape de povara calculelor şi să îmbunătăţească probabilitatea preciziei rezultatelor. Matematicienii din trecut ne-ar invidia pentru că avem la dispoziţie calculatoare electronice şi s-ar minuna de viteza şi precizia lor.

Maşinile de calcul au fost pentru matematică mai mult decât simple unelte. Proiectarea şi funcţionarea lor au pus noi probleme teoretice, de la justificarea unor metode numerice aproximative de rezolvare a ecuaţiilor, până la aspecte profunde ale fundamentelor calculului.

Acum, la începutul secolului XXI, matematicienii au la dispoziţie un software puternic care permite efectuarea nu doar a calculelor numerice, ci şi a celor algebrice şi analitice. Aceste instrumente au deschis noi domenii, au contribuit la rezolvarea unor vechi probleme şi au lăsat timp liber pentru gândirea conceptuală. Ca urmare, matematica a devenit mult mai bogată şi a fost aplicată mult mai multor probleme de ordin practic. Euler avea instrumentele conceptuale pentru a studia curgerea fluidă în jurul unor forme complicate şi, chiar dacă avionul nu fusese încă inventat, existau o mulţime de probleme interesante legate de corăbii. Dar el nu avea nici o metodă practică de a aplica aceste tehnici.

O nouă direcţie, despre care n-am vorbit, este folosirea calculatoarelor în demonstraţiile matematice. Mai multe teoreme importante, demonstrate în ultimii ani, se bazează pe calcule numeroase, dar de rutină, efectuate pe computer. S-a

susținut că demonstrațiile asistate de calculator schimbă natura fundamentală a demonstrației, înlăturând cerința ca demonstrația să poată fi verificată de o minte umană. Această afirmație e controversată, dar, chiar dacă este adevărată, rezultatul schimbării este că matematica devine un și mai puternic ajutor al minții umane.

La ce ne ajută analiza numerică

Analiza numerică joacă un rol esențial în proiectarea avioanelor moderne. Până relativ de curând inginerii determinau curgerea aerului pe lângă aripile și fuselajul unui avion folosind tuneluri aerodinamice. Ei plasau o machetă a avionului în tunel, suflau aer și observau tiparele curgerii. Ecuații precum cele ale lui Navier și Stokes ofereau diferite indicații teoretice, dar nu puteau fi rezolvate pentru un avion real din cauza formei lor complicate.

Calculatoarele de azi sunt atât de puternice, iar metodele numerice pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale pe calculator au devenit atât de eficiente, încât în multe cazuri tunelul aerodinamic real a fost înlocuit de tunelul aerodinamic numeric – un model computerizat al avionului. Ecuațiile Navier-Stokes sunt atât de precise, încât, folosite în acest mod, dau rezultate demne de încredere. Avantajul folosirii calculatorului este că orice caracteristică a curgerii aerului poate fi analizată și vizualizată.

Calculul numeric al curgerii aerului pe lângă avion

Și neregularitățile
își au tiparele lor

20

Pe la mijlocul secolului XX matematica trecea printr-o fază de creştere rapidă, stimulată de numeroasele ei aplicaţii şi de puterea noilor ei metode. O istorie cuprinzătoare a perioadei moderne a matematicii ar ocupa cel puţin la fel de mult spaţiu ca prezentarea a tot ce a condus la această perioadă. Nu ne rămâne decât să dăm câteva exemple reprezentative pentru a demonstra că originalitatea şi creativitatea sunt în continuare vii şi active în matematică. Un asemenea domeniu, care a ajuns de interes public în anii '70 şi '90, este teoria haosului, numele dat de jurnalişti dinamicii neliniare. Acest domeniu a apărut în chip firesc, din modelele tradiţionale, folosind analiza matematică. Un altul este cel al sistemelor complexe, care face apel la metode mai puţin ortodoxe şi stimulează atât noua matematică, cât şi noua ştiinţă.

Haosul

Înainte de 1960, cuvântul haos avea o singură semnificaţie: dezordine amorfă. Între timp însă, descoperiri fundamentale din ştiinţă şi matematică i-au conferit o a doua semnificaţie, mai subtilă, combinând aspecte ale dezordinii cu aspecte ale formei. Lucrarea lui Newton *Principiile matematice ale filozofiei naturale* redusese sistemul lumii la ecuaţii diferenţiale, iar acestea sunt *deterministe*, în sensul că, odată cunoscută starea iniţială a sistemului, viitorul lui e unic determinat la orice timp. Pentru Newton, universul era ca mecanismul unui ceasornic pus în mişcare de mâna creatorului, dar urmând apoi un unic drum inevitabil. Este o viziune care pare să nu lase loc liberului-arbitru, iar aceasta s-ar putea să fi fost una din primele surse ale credinţei că ştiinţa e rece şi inumană, însă în acelaşi timp este şi viziunea care ne-a fost de mare ajutor, dăruindu-ne radioul, televiziunea, radarul, telefoanele mobile, avioanele, comunicaţiile prin satelit, fibrele sintetice, plasticul şi calculatoarele.

Creşterea determinismului ştiinţific a fost însoţită şi de o vagă, dar adânc înrădăcinată credinţă în conservarea complexităţii. Aceasta e presupunerea că o cauză simplă trebuie să producă un efect simplu, de aici rezultând că efectele complexe trebuie să aibă cauze complexe. Credinţa aceasta ne face ca atunci când privim un obiect sau un sistem complex să ne întrebăm de unde provine complexitatea. De unde a provenit, de exemplu, complexitatea vieţii, dat fiind

că ea trebuie să fi apărut pe o planetă lipsită de viaţă? Ne pare puţin plauzibil ca ea să fi apărut spontan, dar tehnicile matematice cele mai recente asta ne indică.

O soluţie unică?

Caracterul determinist al legilor fizicii rezultă dintr-un fapt matematic simplu: o ecuaţie diferenţială cu condiţii iniţiale date nu are decât cel mult o soluţie. În *Cartea autostopistului galactic* a lui Douglas Adams, supercalculatorul *Deep Thought* află după cinci milioane de ani faimosul răspuns 42 la marea întrebare privind viaţa. E aici o parodie a afirmaţiilor prin care Laplace rezuma perspectiva matematică asupra determinismului:

> „Dacă o inteligenţă care cunoaşte la orice moment toate forţele ce însufleţesc natura şi poziţiile reciproce ale fiinţelor cuprinse în ea ar fi suficient de vastă pentru a analiza datele sale, ea ar condensa într-o singură formulă mişcarea celor mai mari corpuri ale universului şi a celui mai uşor atom: pentru o asemenea inteligenţă nimic n-ar fi incert, iar viitorul i-ar fi prezent în faţa ochilor la fel ca trecutul."

El îşi aducea apoi cititorii cu picioarele pe pământ adăugând:

> „Mintea umană oferă doar o palidă schiţă a acestei inteligenţe prin perfecţiunea pe care a putut s-o dea astronomiei."

Ca o ironie, tocmai mecanica cerească, partea cea mai evident deterministă a fizicii, a fost aceea care a îngropat determinismul laplacian. În 1886 regele Oscar al II-lea al Suediei (care domnea şi peste Norvegia) a oferit un premiu pentru rezolvarea problemei stabilităţii sistemului solar. Micul nostru colţ din universul-ceasornic va tăcăi oare pentru totdeauna sau e posibil ca o planetă să se prăbuşească în Soare ori să evadeze în spaţiul interstelar? Legile fizice ale conservării energiei şi impulsului nu exclud nici una din aceste eventualităţi – dar analiza mai amănunţită a dinamicii sistemului solar ne poate spune oare mai multe?

Această complexitate este privită astăzi ca un exemplu clasic de haos.

Poincaré era hotărât să câştige premiul şi şi-a făcut încălzirea atacând o problemă mai simplă – un sistem de trei corpuri cereşti. Ecuaţiile pentru trei corpuri nu arată mult mai rău decât cele pentru două şi au cam aceeaşi formă generală. Dar încălzirea aceasta a lui Poincaré cu problema celor trei corpuri s-a dovedit neaşteptat de dificilă, iar el a descoperit ceva tulburător. Soluţiile acestor ecuaţii erau total diferite de cele din cazul a

două corpuri. De fapt, soluțiile erau atât de complicate, încât nu puteau fi exprimate printr-o formulă matematică. În plus, el a reuşit să înțeleagă suficient din geometria – mai exact din topologia – soluțiilor pentru a demonstra că mişcările reprezentate de aceste soluții puteau fi uneori extrem de dezordonate şi neregulate. „Este frapantă", scria Poincaré, „complexitatea acestui tablou pe care nici măcar nu încerc să-l reprezint. Nimic nu poate exprima mai bine complexitatea problemei celor trei corpuri." Această complexitate este privită astăzi ca un exemplu clasic de haos.

Lucrarea sa a obținut premiul regelui Oscar al II-lea, chiar dacă nu rezolva complet problema pusă. Şaizeci de ani mai târziu ea a declanşat o revoluție în felul nostru de a privi universul şi relația sa cu matematica.

În 1926–1927 inginerul olandez Balthazar van der Pol a construit un circuit electronic pentru a simula un model matematic al inimii şi a descoperit că în anumite condiții oscilația rezultantă nu este una periodică, asemenea unei bătăi normale a inimii, ci una neregulată. Descoperirea sa a fost aşezată pe o bază matematică solidă în timpul celui de-al Doilea Război Mondial de către John Littlewood şi Mary Cartwright, într-un studiu care pornea de la electronica radarului. Au trebuit să treacă peste 40 de ani pentru ca semnificația mai amplă a rezultatelor lor să devină evidentă.

Dinamica neliniară

La începutul anilor '60, matematicianul american Stephen Smale a inaugurat epoca modernă a sistemelor dinamice punând problema clasificării complete a comportării circuitelor electronice. După ce inițial se aşteptase ca răspunsul să fie nişte combinații de mişcări periodice, el şi-a dat imediat seama că e posibil un comportament mult mai complicat. În particular, el a dezvoltat descoperirea lui Poincaré privind mişcarea complexă din problema celor trei corpuri, simplificând geometria pentru a obține un sistem numit *potcoava lui Smale*. El a demonstrat că sistemul-potcoavă, deşi determinist, are anumite trăsături aleatoare. Alte exemple de asemenea fenomene au fost găsite de şcolile de dinamică americană şi rusă, cu contribuții remarcabile ale lui Aleksandr Şarkovski şi Vladimir Arnold, şi a început să apară o teorie generală. Termenul „haos" a fost introdus de James Yorke şi Tien-Yien Li în 1975, într-un scurt articol care simplifica unul dintre rezultatele şcolii ruse: Teorema lui Şarkovski din 1964, care descria un straniu tipar al soluțiilor periodice ale unui sistem dinamic discret – unul în care timpul se scurge în paşi cu valori întregi, în loc să fie continuu.

GREŞEALA LUI POINCARÉ

Scotocind prin arhivele Institutului Mittag–Leffler din Stockholm, June Barrow-Green a descoperit recent o afacere jenantă rămasă secretă până atunci. Lucrarea cu care Poincaré câştigase premiul conţinea o gravă greşeală. În loc să descopere haosul, aşa cum se presupunea, el susţinuse că demonstrează absenţa acestuia. Memoriul înaintat iniţial de el demonstra că toate mişcările din problema celor trei corpuri sunt regulate şi au un comportament cuminte.

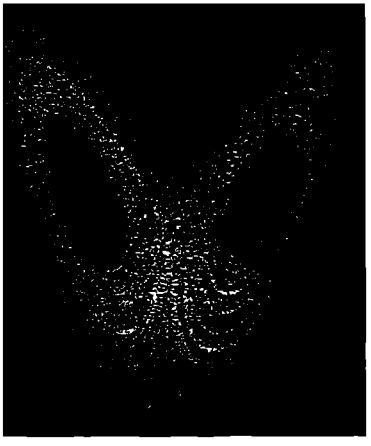
După primirea premiului, Poincaré a găsit o eroare şi şi-a dat imediat seama că ea îi demola complet demonstraţia. Dar memoriul premiat fusese deja publicat ca un număr al revistei institutului. Revista a fost retrasă, iar Poincaré a plătit tipărirea unei noi versiuni, care conţinea printre altele bifurcaţiile homocline descoperite de el şi ceea ce se numeşte azi haos. Asta l-a costat mult mai mulţi bani decât câştigase cu memoriul său greşit. Aproape toate exemplarele versiunii incorecte au fost retrase şi distruse, dar unul dintre ele, păstrat în arhivele Institutului, a scăpat.

Între timp, sistemele haotice au început să apară sporadic în literatura aplicată – din nou, în genere trecute cu vederea de comunitatea ştiinţifică mai largă. Cel mai cunoscut dintre ele a fost introdus de meteorologul Eduard Lorenz în 1963. Lorenz a încercat să modeleze convecţia atmosferică, aproximând extrem de complexele ecuaţii ale acestui fenomen prin ecuaţii mult mai simple în trei variabile. Rezolvându-le numeric cu un calculator, el a descoperit că soluţia oscila într-o manieră neregulată, aproape aleatoare. A mai descoperit şi că dacă aceleaşi ecuaţii sunt rezolvate folosind condiţii iniţiale uşor diferite, atunci diferenţele sunt mult amplificate, iar noua soluţie e complet diferită. Prezentarea făcută de el fenomenului în conferinţele pe care le-a ţinut a condus la cunoscuta expresie „efect fluture", în care bătaia aripilor unui fluture provoacă, o lună mai târziu, un uragan la celălalt capăt al pământului.

Acest scenariu bizar este unul autentic, dar într-un sens mai subtil. Să presupunem că am putea derula vremea pe glob de două ori: o dată cu fluturele şi o dată fără el. Am descoperi atunci într-adevăr mari diferenţe, între care un posibil uragan la prima derulare şi nici unul la a doua. Este exact efectul care apare în simulările pe calculator ale ecuaţiilor folosite pentru a prezice vremea, efect care produce mari dificultăţi prognozelor meteo. Ar fi însă o eroare să tragem concluzia că fluturele a provocat uraganul. În lumea reală, vremea este

influențată nu de un singur fluture, ci de trăsăturile statistice ale bilioane de fluturi și ale altor perturbații infime. În mod colectiv, acestea au o influență asupra locului și momentului producerii uraganelor, precum și a direcției în care ele se îndreaptă.

Folosind metode topologice, Smale, Arnold și colaboratorii lor au demonstrat că soluțiile bizare observate de Poincaré erau consecința inevitabilă a unor *atractori stranii* din ecuații. Un atractor straniu este o mișcare complexă la care sistemul ajunge în mod inevitabil. Ea poate fi vizualizată ca o formă în spațiul stărilor format de variabilele ce descriu sistemul. Atractorul Lorenz, care descrie în această manieră ecuațiile lui Lorenz, seamănă oarecum cu masca lui Lone Ranger, dar fiecare suprafață vizibilă are o infinitate de straturi.



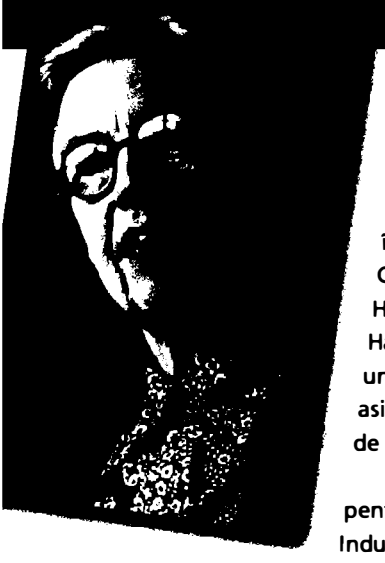
Atractorul Lorenz

Structura atractorilor explică o trăsătură ciudată a sistemelor haotice: asupra lor se pot face predicții pe termen scurt (spre deosebire, bunăoară, de aruncarea unui zar), dar nu și pe termen lung. De ce nu se pot aduna mai multe predicții pe termen scurt pentru a crea o predicție pe termen lung? Deoarece precizia cu care putem descrie un sistem haotic scade în timp, într-un ritm din ce în ce mai rapid, așa încât există un orizont al predicției dincolo de care nu putem pătrunde. Cu toate acestea, sistemul rămâne la același atractor straniu - dar traiectoria lui prin atractor se modifică mult.

Aceasta ne schimbă perspectiva asupra efectului fluture. Tot ce pot face fluturii e să deplaseze vremea în jurul aceluiași atractor straniu – așa încât ea arată mereu ca o vreme perfect plauzibilă. E doar ușor diferită de cea care ar fi fost fără toți acești fluturi.

David Ruelle și Floris Takens au găsit o posibilă aplicație a atractorilor stranii în fizică: dificila problemă a curgerii turbulente a unui fluid. Ecuațiile standard ale curgerii unui fluid, numite ecuațiile Navier–Stokes, sunt ecuații cu derivate parțiale, și prin urmare sunt deterministe. Curgerea laminară, un tip obișnuit de curgere a fluidelor, este netedă și regulată, exact ce așteptăm din partea unei teorii deterministe. Dar un alt tip de curgere, cea turbulentă, este înspumată și neregulată, aproape aleatoare. Teoriile anterioare susțineau fie că turbulența ar fi o combinație extrem de complicată a unor modele care sunt

Mary Lucy Cartwright
1900–1998



Mary Cartwright a absolvit Universitatea Oxford în 1925, numărându-se printre cele doar cinci femei care studiau matematica la acea universitate. După o scurtă perioadă de profesorat în învățământul mediu, a obținut un doctorat la Cambridge, teoretic sub conducerea lui Godfrey Hardy, dar de fapt sub cea a lui Titschmarsh, deoarece Hardy se afla la Princeton. Subiectul tezei sale era unul de analiză complexă. În 1934 a fost numită asistent la Cambridge, iar în 1936 a devenit directoare de studii la Girton College.

În 1938, în colaborare cu John Littlewood, a lucrat pentru Departamentul de Cercetări Științifice și Industriale pe tema ecuațiilor diferențiale legate de radar. Cei doi au descoperit că aceste ecuații aveau soluții extrem de complicate, una dintre primele anticipări ale fenomenului de haos. Pentru acest rezultat ea a devenit în 1947 prima matematiciană aleasă ca membră a Societății Regale. În 1948 a fost făcută *Mistress of Girton*, iar din 1959 până în 1968 a ținut cursuri la Cambridge. A primit numeroase onoruri și în 1969 a devenit *Dame Commander* a Imperiului Britanic.

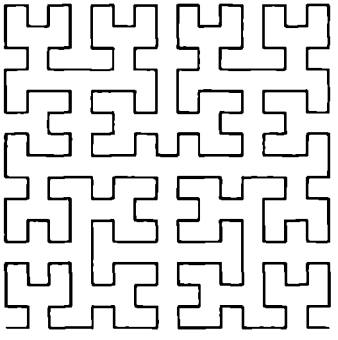
fiecare în parte foarte simple și regulate, fie că ecuațiile Navier–Stokes nu mai sunt valabile în regim turbulent. Ruelle și Takens au propus însă o a treia teorie. Ei au susținut că turbulența e un exemplu fizic de atractor straniu.

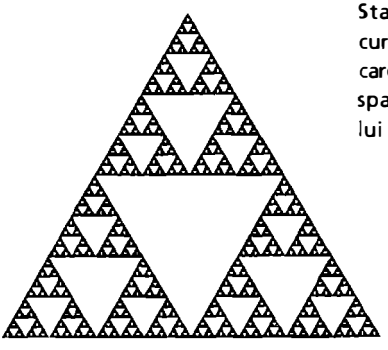
La început, această teorie a fost întâmpinată cu un anume scepticism, dar astăzi știm că era corectă în esență, chiar dacă detaliile erau discutabile. Au urmat alte aplicații de succes, iar cuvântul „haos" a fost omologat ca descriere a oricărui asemenea comportament.

Monștri teoretici

O a doua temă intră acum în povestirea noastră. Între 1870 și 1930 câțiva matematicieni excentrici au inventat o serie de forme bizare, al căror unic scop era să arate limitele analizei clasice. La începuturile analizei, matematicienii presupuseseră că orice cantitate care variază continuu trebuie să aibă aproape peste tot o rată bine definită de variație. De exemplu, un obiect care se deplasează

continuu în spațiu are o viteză bine definită, cu excepția câtorva momente în care viteza lui se schimbă abrupt. În 1872 însă, Weierstrass a arătat că această veche presupunere e falsă. Un obiect se poate deplasa continuu, dar într-o manieră atât de neregulată, încât viteza lui se schimbă abrupt în fiecare moment. Aceasta înseamnă că nu are o viteză bine definită.

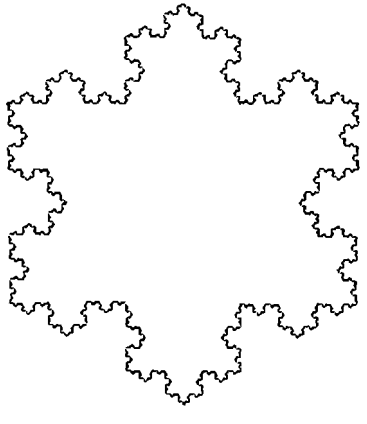




Stadii din construcția curbei lui Hilbert care umple întregul spațiu și triunghiul lui Sierpinski

Între alte contribuții la strania faună a anomaliilor s-a numărat o curbă care umple o întreagă regiune a spațiului (o asemenea curbă a fost găsită de Peano în 1890, iar alta de Hilbert în 1891), o curbă care se autointersectează în fiecare punct (descoperită de Waclaw Sierpinski în 1915) și o curbă de lungime infinită care mărginește o arie finită. Acest ultim exemplu de bizarerie geometrică, inventat de Helge von Koch în 1906, este *curba fulgului de zăpadă*, iar construcția lui decurge astfel: se începe cu un triunghi echilateral și se adaugă niște promontorii triunghiulare în mijlocul fiecărei laturi, pentru a crea o stea cu șase colțuri. Apoi se adaugă niște promontorii mai mici la mijlocul celor 12 laturi ale stelei, și se repetă la nesfârșit procedeul. Datorită simetriei sale hexadice, rezultatul arată ca un complicat fulg de zăpadă. Adevărații fulgi de zăpadă cresc după altă regulă, dar asta e o altă poveste.

Curba fulgului de zăpadă



Matematica oficială s-a grăbit să spună despre aceste bizarerii că sunt „patologice" și reprezintă o „galerie de monștri", dar câteva eșecuri stânjenitoare au arătat că lucrurile trebuie privite cu mai multă atenție, iar punctul de vedere excentric a câștigat teren. Logica din spatele analizei e atât de subtilă, încât saltul spre concluzii plauzibile este primejdios: monștrii

ne avertizează asupra pericolelor. Astfel, la graniţa dintre secole, matematicienii se obişnuiseră cu prezenţa noilor mărfuri din magazinul de curiozităţi al excentricilor – ele menţineau teoria fără a avea vreun efect grav asupra aplicaţiilor. Pe la 1900, Hilbert vorbea despre întreg domeniul ca despre un paradis în care domneşte armonia.

După 1960, împotriva tuturor aşteptărilor, galeria monştrilor teoretici a primit un neaşteptat impuls în direcţia ştiinţei aplicate. Benoît Mandelbrot a înţeles că aceste curbe monstruoase dezvăluie existenţa unei vaste teorii privind neregularităţile din natură. El le-a rebotezat *fractali*. Până atunci ştiinţa operase cu forme geometrice tradiţionale, cum sunt dreptunghiurile sau sferele, dar pentru Mandelbrot această abordare era mult prea restrictivă. Lumea naturală e plină de structuri complexe şi neregulate – linii de coastă, munţi, nori, copaci, ghețari, sisteme de râuri, valuri oceanice, cratere, conopide – în privinţa cărora geometria tradiţională rămâne mută. E nevoie de o nouă geometrie a naturii.

În prezent, oamenii de ştiinţă au absorbit fractalii în modul lor firesc de a gândi, la fel cum făcuseră înaintaşii lor de la sfârşitul secolului XIX cu monstruozităţile matematicii excentrice. A doua parte a articolului lui Lewis Fry Richardson din 1926 „Difuzia atmosferică prezentată pe un grafic distanţă-vecinătate“ poartă titlul „Există o viteză a vântului?“. Aceasta e privită acum ca o întrebare absolut rezonabilă. Curgerea atmosferică e turbulentă, turbulenţa e fractală, iar fractalii se pot comporta ca funcţia monstruoasă a lui Weiestrass – în continuă mişcare, dar fără o viteză bine definită. Mandelbrot a găsit exemple de fractali în multe domenii din ştiinţă şi din afara ei – forma unui copac, modelul ramificaţiilor unui râu, evoluţia bursei.

Haos pretutindeni!

Din perspectivă geometrică, atractorii stranii introduşi de matematicieni s-au dovedit a fi fractali, iar cele două linii de gândire s-au împletit în ceea ce e astăzi larg cunoscut sub numele de teoria haosului.

Haosul poate fi întâlnit practic în toate domeniile ştiinţei. Jack Wisdom şi Jacques Laskar au descoperit că mişcarea sistemului solar e haotică. Se cunosc toate ecuaţiile, masele şi vitezele cerute pentru a prezice mişcarea viitoare pe vecie, dar există un orizont al predicţiei de aproximativ zece milioane de ani datorat haosului dinamic. Aşa încât nu aveţi nici o şansă să aflaţi de ce parte a Soarelui se va afla planeta Pluto în anul 10 000 000. Aceiaşi astronomi au arătat şi că mareele Lunii stabilizează Pământul faţă de influenţele care altminteri ar

duce la o mişcare haotică, provocând treceri bruşte ale climei de la perioade calde la epoci glaciare şi invers; astfel, teoria haosului demonstrează că, în absenţa Lunii, Pământul n-ar fi un loc prea ospitalier.

Haosul apare în aproape toate modelele matematice ale populaţiilor biologice, iar experimente recente (în care nişte gândaci au fost lăsaţi să se înmulţească în condiţii controlate) arată că el apare şi la populaţii biologice reale. În mod normal, ecosistemele nu ajung la un echilibru static, ci rătăcesc în jurul atractorilor stranii, arătând de obicei destul de asemănător, dar modificându-se necontenit. Eşecul înţelegerii dinamicii subtile a ecosistemelor e una dintre cauzele pentru care pescăriile se află în pragul dezastrului.

Complexitatea

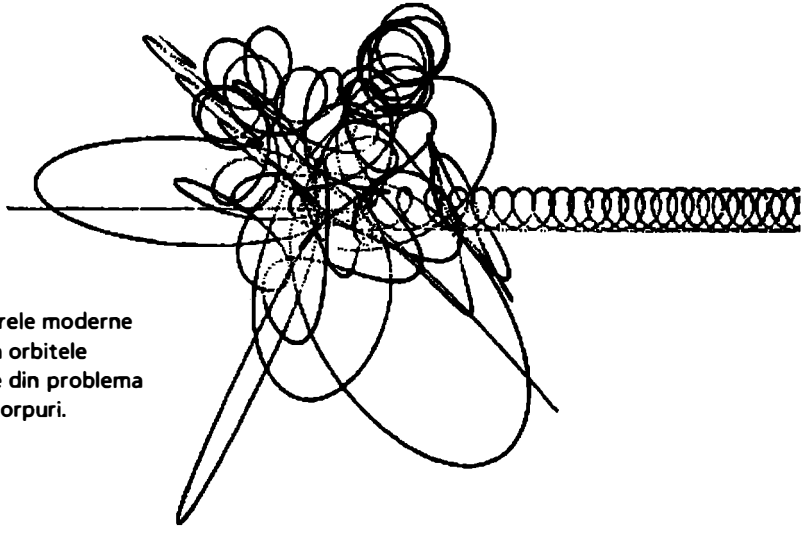
De la haos ne întoarcem la complexitate. Multe dintre problemele cu care se confruntă azi ştiinţa sunt extrem de complicate. Pentru a administra un recif de corali, o pădure sau o pescărie trebuie înţeles un ecosistem extrem de complex, în care schimbări aparent inofensive pot provoca probleme neaşteptate. Lumea reală e atât de complicată şi e atât de dificil de măsurat, încât metodele de modelare convenţională sunt greu de pus la punct, şi încă şi mai greu de verificat. Ca răspuns la aceste provocări, tot mai mulţi savanţi au ajuns la concluzia că trebuie să schimbăm radical felul în care modelăm lumea noastră.

Pe la începutul anilor '80, George Cowan, fost director de cercetare la Los Alamos, a decis că o cale pentru a avansa este cea indicată de noile teorii ale dinamicii neliniare. Aici cauze mici pot crea efecte imense, regulile rigide pot conduce la anarhie, iar întregul are deseori proprietăţi care nu există, nici măcar sub o formă rudimentară, în componentele sale. În linii mari, acestea sunt tocmai trăsăturile observate în lumea reală. Dar asemănarea e oare mai profundă – suficient de profundă pentru a oferi o înţelegere autentică?

Cowan a avut ideea unui nou institut de cercetări dedicate aplicaţiilor interdisciplinare şi dezvoltării dinamicii neliniare. Lui i s-a alăturat Murray Gell-Mann, specialist în fizica particulelor şi laureat al Premiului Nobel, iar în 1984 ei au înfiinţat ceea ce se numea pe atunci Institutul Rio Grande. În prezent, acesta este Institutul Santa Fe, un centru internaţional de studiere a sistemelor complexe. Teoria complexităţii a găsit noi metode şi abordări matematice, făcând apel la calculatoare pentru a crea modele digitale ale naturii. Ea foloseşte puterea calculatoarelor – pentru a analiza aceste modele şi a deduce uimitoare proprietăţi ale sistemelor complexe – şi foloseşte dinamica neliniară împreună cu alte domenii ale matematicii – pentru a înţelege ceea ce dezvăluie calculatoarele.

La ce i-a ajutat dinamica neliniară

Până când dinamica neliniară să devină un subiect important în modelarea ştiinţifică, rolul ei a fost mai ales unul teoretic. Studiul cel mai profund era cel al lui Poincaré despre cele trei corpuri din mecanica cerească. Acesta prezicea existenţa unor orbite extrem de complexe, dar nu spunea mare lucru despre cum arată ele. În esenţă, studiul arăta că ecuaţii simple puteau să nu aibă soluţii simple – deci complexitatea nu se conservă, ci poate avea origini mai simple.



Calculatoarele moderne pot calcula orbitele complicate din problema celor trei corpuri.

Automatul celular

Într-un anumit tip de model matematic recent, cunoscut sub numele de *automat celular*, lucruri precum copaci, păsări şi veverițe sunt reprezentate ca mici pătrățele colorate. Ele concurează cu vecinii lor într-un joc matematic pe calculator. Simplitatea este înşelătoare – aceste jocuri țin de avangarda ştiinței moderne.

Automatele celulare s-au impus atenției în anii '50, pe când John von Neumann încerca să înțeleagă capacitatea vieții de a se autoreplica. Stanislaw Ulam a propus folosirea unui sistem introdus în anii '40 de Konrad Zuse, unul dintre fondatorii informaticii. Închipuiți-vă un univers compus dintr-o vastă rețea de pătrate, numite *celule*, semănând cu o uriaşă tablă de şah. În fiecare moment, un pătrat dat poate exista într-o anumită stare. Acest univers-tablă de şah e

înzestrat cu propriile sale legi ale naturii, descriind felul în care starea fiecărei celule trebuie să se schimbe atunci când timpul trece la momentul următor. E util să reprezentăm starea aceasta prin culori. Regulile sunt atunci enunțuri de tipul: „Dacă o celulă este roşie şi are lângă ea două celule albastre, ea trebuie să devină galbenă." Un asemenea sistem se numeşte automat celular – celular datorită rețelei, automat deoarece se supune orbeşte oricăror reguli care îi sunt impuse.

Pentru a modela cea mai simplă trăsătură a ființelor vii, von Neumann a creat o configurație de celule care se puteau multiplica – se puteau autocopia. Ea avea 200 000 de celule şi folosea 29 de culori diferite pentru a exista o descriere codificată a ei. Această descriere putea fi copiată orbeşte şi putea fi folosită ca plan pentru alcătuirea de noi configurații de acelaşi tip. Von Neumann nu şi-a publicat lucrarea până în 1966, când Crick şi Watson descoperiseră deja structura ADN-ului şi devenise clar cum are loc în realitate replicarea. Automatele celulare au fost ignorate timp de încă 30 de ani.

Automat celular

Prin anii '80 a crescut însă interesul pentru sistemele compuse dintr-un mare număr de părți simple care interacționează pentru a produce un ansamblu complicat. Tradițional, cel mai bun mijloc de a modela matematic un sistem este de a include cât mai multe detalii: cu cât modelul se apropie mai mult de realitate, cu atât mai bine. Dar această abordare detaliată eşuează când e vorba de sisteme foarte complexe. Să presupunem, de exemplu, că vrem să înțelegem creşterea unei populații de iepuri. Nu e nevoie să modelăm lungimea blănii sau a urechilor iepurilor, ori felul în care funcționează sistemul lor imunitar. Nu avem nevoie decât de câteva date elementare despre fiecare iepure: vârsta, sexul şi dacă iepuroaica e gestantă, pentru ca apoi să ne concentrăm în calcul asupra a ceea ce contează cu adevărat.

Pentru acest tip de sistem, automatele celulare sunt foarte eficiente. Ele fac posibilă ignorarea detaliilor inutile ale componentelor individuale şi concentrarea asupra modului în care interacționează componentele. Aceasta se dovedeşte a fi o cale excelentă de a stabili care factori sunt importanți şi de a ne face idei generale privind cauzele comportamentului sistemelor complexe.

Geologie și biologie

Un sistem complex care sfidează analiza prin tehnici tradiționale de modelare este formarea bazinelor râurilor şi a deltelor. Peter Burrough a folosit automate celulare pentru a explica de ce aceste configurații naturale adoptă formele pe care le au. Automatul modelează interacțiunile dintre apă, uscat şi sedimente. Rezultatele explică modul în care diversele ritmuri de eroziune a solului afectează forma râurilor şi modul în care râurile transportă sedimente, aspecte importante pentru ingineria şi administrarea râurilor. Acestea prezintă de asemenea interes pentru companiile petroliere, deoarece petrolul şi gazul natural se găsesc deseori în straturi geologice care s-au depus inițial ca sedimente.

O altă frumoasă aplicație a automatelor celulare se întâlneşte în biologie. Hans Meinhardt a folosit automate celulare pentru a modela formarea modelelor de pe corpul animalelor, de la scoici la zebre. Factorii esențiali sunt concentrațiile substanțelor chimice. Interacțiunile sunt reacțiile care au loc într-o celulă dată şi difuzia între celulele învecinate. Cele două tipuri de interacțiune se combină spre a da regulile efective pentru starea următoare. Rezultatele oferă informații utile în înțelegerea tiparelor de activare şi de inhibare care controlează dinamic genele producătoare de pigment în cursul creşterii animalului.

Stuart Kauffman a aplicat diverse tehnici din teoria complexității pentru a aborda o altă mare enigmă a biologiei: dezvoltarea formei organice. Creşterea şi dezvoltarea unui organism trebuie să implice în mare măsură dinamica şi nu poate fi vorba de simplul transfer către forma organică a informației conținute în ADN. O idee promițătoare este de a reprezenta dezvoltarea ca dinamica unui sistem neliniar complex.

Automatele celulare au ajuns acum la deplina maturitate şi ne oferă o nouă perspectivă asupra originii vieții. Automatul lui von Neumann care se autocopiază e unul extrem de particular, croit anume pentru a face cópii ale unei configurații inițiale foarte complexe. Este această trăsătură tipică pentru automatele care se autocopiază sau copierea poate fi obținută fără a porni de la o configurație foarte particulară? În 1993 Hui-Hsien Chou şi James Reggia au inventat un automat celular cu 29 de stări pentru care o stare inițială aleasă la întâmplare, numită supa primordială, conduce la structuri care se autocopiază în mai mult de 98% din cazuri. La acest automat entitățile autoreplicatoare sunt practic o certitudine.

Sistemele complexe vin în sprijinul ideii că pe o planetă lipsită de viață, dar dispunând de o chimie suficient de complexă, e probabil ca viața să apară în mod spontan şi să se autoorganizeze ajungând la forme tot mai complexe şi

La ce ne ajută dinamica neliniară

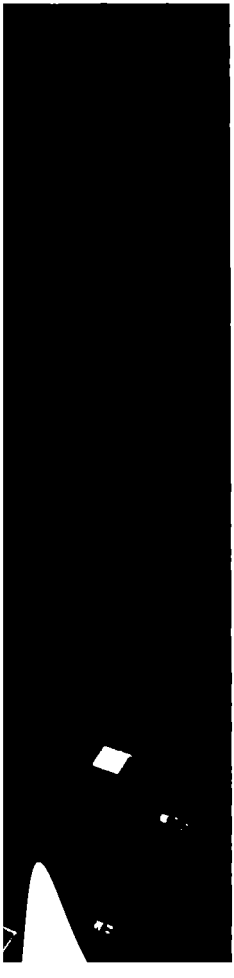
S-ar putea crede că haosul nu are aplicații practice, fiind neregulat, impredictibil și extrem de sensibil la mici perturbații. Dar, deoarece se bazează pe legi deterministe, haosul se dovedește util tocmai din cauza acestor însușiri.

Una dintre aplicațiile care s-ar putea dovedi extrem de importante este controlul haotic. Pe la 1950 matematicianul John von Neumann a sugerat că instabilitatea vremii ar putea fi transformată într-o bună zi într-un avantaj, fiindcă un efect de amploare dorit poate fi generat de o infimă perturbație. În 1979 Edward Belbruno a înțeles că acest efect ar putea fi

folosit în astronautică pentru a deplasa o navă spaţială pe distanţe mari cu un consum foarte mic de combustibil. Dar asemenea orbite ar fi străbătute în timp îndelungat – doi ani de la Pământ la Lună, de exemplu –, iar NASA şi-a pierdut interesul pentru această idee.

În 1990 Japonia a lansat o mică sondă lunară, Hagoromo, care s-a desprins de o sondă mai mare, Hiten, rămasă pe o orbită terestră. Staţia radio de pe Hagoromo a încetat însă să funcţioneze, aşa încât Hiten rămânea inutilă. Japonia dorea să salveze ceva din această misiune, dar Hiten nu avea decât 10% din combustibilul necesar pentru a ajunge la Lună folosind o orbită convenţională. Un inginer angajat la proiect şi-a amintit de ideea lui Belbruno şi a solicitat ajutorul acestuia. După zece luni Hiten se afla în drum spre Lună şi dincolo de ea, căutând particule captive de praf interstelar – folosind doar jumătate din combustibil. După acest succes, tehnica a fost folosită în repetate rânduri, în particular pentru sonda Genesis care a cules date despre vântul solar şi pentru misiunea SMARTONE a Agenţiei Spaţiale Europene.

Această tehnică se aplică şi pe Pământ. În 1990 Celso Grebogi, Edward Ott şi James Yorke au publicat o schemă teoretică generală de exploatare a efectului fluture în controlul sistemelor haotice. Metoda a fost folosită pentru a sincroniza o baterie de laseri, pentru a controla neregularităţile bătăilor inimii, deschizând posibilitatea unui stimulator cardiac inteligent, pentru a controla undele electrice din creier, ceea ce ar putea ajuta la eliminarea crizelor de epilepsie şi pentru a netezi mişcarea unui fluid turbulent, ceea ce în viitor ar putea optimiza consumul de combustibil al avioanelor.



Sonda spaţială Genesis (NASA)

mai sofisticate. Ce rămâne să fie înțeles este care anume tipuri de reguli conduc la apariția spontană a configurațiilor autoreplicatoare în universul nostru – pe scurt, ce tip de legi fizice fac ca acest prim pas crucial spre viață să fie nu doar posibil, ci inevitabil.

Cum a fost creată matematica

Istoria matematicii e lungă şi întortocheată. Pionierii matematicii au făcut descoperiri remarcabile, dar s-au şi împotmolit uneori vreme de secole. Asta e condiția pionierului. Atunci când pasul următor e evident, oricine îl poate face. Iar astfel, în decursul a patru milenii, a luat ființă structura complicată şi elegantă pe care o numim matematică. Dezvoltarea ei nu a fost lină, momente de activitate frenetică au fost urmate de perioade de stagnare; centrul ei s-a deplasat pe glob, după cum culturile umane creşteau şi decădeau. Uneori se dezvota conform nevoilor practice ale unei culturi, alteori îşi urma propria ei direcție, matematicienii părând că sunt prinşi în simple jocuri intelectuale. Iar surprinzător de des aceste jocuri şi-au dovedit în cele din urmă eficacitatea în lumea reală, stimulând dezvoltarea unor noi tehnici, noi perspective şi noi idei.

Matematica nu s-a oprit. Noi aplicații cer o nouă matematică, iar matematicienii răspund acestor necesități. Biologia mai ales pune modelarea şi înțelegerea matematică în fața unor noi provocări. Cerințele interne ale matematicii continuă să stimuleze noi idei şi noi teorii. Multe conjecturi importante rămân nerezolvate, dar matematicienii lucrează la ele.

În îndelungata sa istorie, matematica s-a inspirat din două surse: lumea reală şi lumea imaginației umane. Care e mai importantă? Nici una. Ceea ce contează e combinarea lor. Perspectiva istorică arată că forța şi frumusețea matematicii provin din amândouă. Antichitatea greacă e privită deseori ca o Epocă de Aur în care logica, matematica şi filozofia au fost puse în slujba condiției umane. Dar progresele vechilor greci sunt doar un episod din povestea care se desfăşoară în continuare. Matematica n-a fost nicicând atât de activă, atât de bogată şi atât de importantă pentru societatea noastră.

Bine ați venit în Epoca de Aur a matematicii.

Bibliografie

Cărți și articole

E. Belbruno, *Fly Me to the Moon*, Princeton University Press, Princeton, 2007.

E.T. Bell, *Men of Mathematics* (2 volume), Pelican, Harmondsworth, 1953.

E.T. Bell, *The Development of Mathematics*, Dover, New York, 2000.

R. Bourgne si J.-P. Azra, *Écrits et Mémoires Mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris, 1962.

C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968.

W.K. Bühler, *Gauss: a Biographical Study*, Springer, Berlin, 1981.

J. Cardan, *The Book of My Life* (traducere de Jean Stoner), Dent, Londra, 1931.

G. Cardano, *The Great Art or the Rules of Algebra* (traducere de T. Richard Witmer), MIT Press, Cambridge MA, 1968.

J. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover, New York, 1963.

T. Dantzig, *Number, The Language of Science* (ed. J. Mazur), Pi Press, New York, 2005.

Euclid, *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (3 volume) (traducere de Sir Thomas L. Heath), Dover, New York, 1956.

J. Fauvel și J. Gray, *The History of Mathematics, A Reader*, Macmillan Education, Basingstoke, 1987.

D.H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Clarendon Press, Oxfrod, 1987.

C.F. Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*, Leipzig, 1801 (traducere de A.A. Clarke) Yale University Press, New Haven, 1965.

A. Hyman, *Charles Babbage*, Oxford University Press, Oxford, 1984.

G.G. Joseph, *The Crest of the Peacock, Non-European Roots of Mathematics*, Penguin, Harmondsworth, 2000.

V.J. Katz, *A History of Mathematics* (ediția a doua), Addison-Wesley, Reading MA, 1998.

M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford, University Press, Oxford, 1972.

A.H. Koblitz, *A Convergence of Lives–Sofia Kovalevskaia*, Birkhäuser, Boston, 1983.

N. Koblitz, *A Course in Number Theory and Cryptography* (ediția a doua), Springer, New York, 1994.

M. Livio, *The Golden Ratio*, Broadway, New York, 2002 (traducere românească: *Secțiunea de aur*, Humanitas, București, 2009).

M. Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved*, Simon & Schuster, New York, 2005 (traducere românească: *Ecuația care nu a putut fi rezolvată*, Humanitas, București, 2008).

E. Maior, *e – the Story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, 1994.

E. Maior, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, Princeton, 1998.

D. McHale, *George Boole*, Boole Press, Dublin, 1985.

O. Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy* (3 volume) Springer, New York, 1975.

O. Ore, *Niels Hendrik Abel: Mathematician Extraordinary*, University of Minnesota Press, Minneapolis, 1957.

C. Reid, *Hilbert*, Springer, New York, 1970.

T. Rothman, "The short life of Évariste Galois", *Scientific American* (aprilie 1982) 112–120. În T. Rothman, *A Physicist on Madison Avenue*, Princeton University Press, 1991.

D. Sobel, *Longitude*, HarperPerennial, New York, 2005.

I. Stewart, *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos* (ediția a doua), Penguin, Harmondsworth, 1997.

I. Stewart, *Why Beauty is Truth*, Basic Books, New York, 2007 (traducere românească: *De ce frumusețea este adevărul*, Humanitas, București, 2010).

S.M. Stigler, *The History of Statistics*, Harvard University Press, Cambridge MA, 1986.

B.L. van der Waerden, *A History of Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1994.

D.Welsh, *Codes and Cryptography*, Oxford University Press, Oxford, 1988.

Internet

Majoritatea temelor pot fi găsite cu ușurință folosind un motor de căutare. Iată trei site-uri generale foarte bune:

The MacTutor History of Mathematics archive:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

Wolfram MathWorld, a compendium of information on mathematical topics:
http://mathworld.wolfram.com

Wikipedia, the free online encyclopaedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

Credit fotografic

p.2/3 ©Tetra Images/Corbis; p.12 ©Muzeul de Istorie Naturală, Belgia; p.15 ©Visual Arts Library (Londra)/Alamy; p.22 ©The Print Collector/Alamy; p.23 ©Bill Casselman, prin amabilitatea Yale Babylonian Collection, posesoarea tăbliței YBC7289; p.32 Portretul matematicianului grec Euclid, de Justus von Ghent/©Bettmann/Corbis; p.35 sus ©Hulton-Deutsch Collection/Corbis, jos ©Time Life Pictures/Getty Images; p.38 ©Maiman Rick/Corbis Sygma; p.41 ©Charles Bowman/Alamy; p.43 ©RubberBall/Alamy; p.44 ©Bettmann/Corbis; p.46 ©Tetra Images/Corbis; p.52 ©Hulton-Deutsch/Corbis; p.45 ©Bettmann/Corbis; p.60/61 ©iStockphoto/Alija; p.62 © Bettmann/Corbis; p.64 ©David Lees/Corbis; p.72 ©Bettmann/Corbis; p.74 ©Science Source/Science Photo Library; p.79 ©Sheila Terry/Science Photo Library; p.94 ©Comstock Select/Corbis; p.98 stânga ©Bettmann/Corbis, dreapta, reprodus cu permisiunea Brotherton Collection, Leeds University Library; p.107 ©Muzeul Arheologic Național, Atena; p.115 ©Bettmann/Corbis; p.118 ©Bettmann/Corbis; p.120 © Muzeul Arheologic Național, Atena; p.122 Credit: Sophie Germain (1776–1831), ilustrație din „Histoire du Socialisme", c.1880 de Leray, Auguste; Private Collection/Archives Charmet/The Bridgeman Art Library; p.124 prin amabilitatea NASA/JPL-Caltech; p.130 ©Bettmann/Corbis; p.131 ©Bettmann/Corbis; p.133 ©Bettmann/Corbis; p.137 ©Bettmann/Corbis; p.139 sus ©Burke/Triolo Productions/Brand X/Corbis, jos ©Martyn Goddard/Corbis; p.142 prin amabilitatea NASA/JPL-Caltech; p.143 ©nagelestock.com/Alamy; p.153 ©Jack Newton/Phototake Inc/Alamy; p.154 ©Bettmann/Corbis; p.158 ©Werner H. Muller/Corbis; p.165 ©Werner H. Muller/Corbis; p.167 ©Bettmann/Corbis; p.183 studiu în perspectivă al unui potir, 1430-40, de Uccello, Paolo (1397–1475) Gabinetto dei Disegni e Stampe, Uffizi, Florența, Italia/Alinari/The Bridgeman Art Library Nationality; p.186 ©Stapleton Collection/Corbis; p.198 ©Robert Yin/Corbis; p.208 ©Bettmann/Corbis; 209 J-L Charmet/Science Photo Library; p.213 sus ©Los Alamos National Laboratory/Science Photo Library, jos ©Robert Yin/Corbis; p.217 ©Science Photo Library; p.224 ©Science Photo Library; p.226 © C. J. Mozzochi, Princeton N.J.; p.230 „Mobius II" de M.C. Escher © 2008 The M.C. Escher Company-Holland. Toate drepturile rezervate. www.mcescher.com; p.242 ©Hulton-Deutsch Collection/Corbis; p.246 ©epa/Corbis; p.247 Phototake Inc./Alamy; p.253 ©Hulton-Deutsch Collection/Corbis; p.266 © Bărbierul de Amman, Jost (1539–91) Bibliothèque Nationale, Paris, Franța/Giraudon/The Bridgeman Art Library; p.280 ©Bettman/Corbis; p.283 ©Alfred Eisenstaedt/Time Life Pictures/Getty Images; p.286 ©ImageBroker/Alamy; p.297 NASA/Science Photo Library; p.300 ©Science Photo Library; p.302 ©Cambridge University Library; p.306 NASA/Science Photo Library; p.312 ©Prof. E. Lorenz, Peter Arnold Inc., Science Photo Library; p.313 imagine oferită de Girton Collcge, Cambridge; p.320 imagine oferită de JPL.

Desenele îi aparțin lui Tim Oliver.

Redactor: Vlad Zografi
Coperta: Angela Rotaru
Tehnoredactor: Manuela Măxineanu
Corectori: Elena Dornescu, Patricia Rădulescu
DTP: Corina Roncea

Tipărit la Monitorul Oficial R.A.

Ian Stewart
Taming the Infinite. The Story of Mathematics
Copyright © Ian Stewart 2007
Published by arrangement with Quercus Publishing PLC (UK)
All rights reserved.

© Humanitas, 2011, pentru prezenta ediție românească

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
STEWART, IAN
Îmblânzirea infinitului: povestea matematicii / Ian Stewart; trad.: Narcisa Gutium. – București: Humanitas, 2011
Bibliogr.
ISBN 978-973-50-2948-7
I. Gutium, Narcisa (trad.)
51(100)(091)

EDITURA HUMANITAS
Piața Presei Libere 1, 013701 București, România
tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51
www.humanitas.ro

Comenzi Carte prin poștă: tel./fax 021/311 23 30
C.P.C.E. – CP 14, București
e-mail: cpp@humanitas.ro
www.libhumanitas.ro